

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

2. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

3. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉥}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

$$\sqrt{-2} \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \sqrt{2}i = 2i^2 = -2$$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ x - y = 1 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

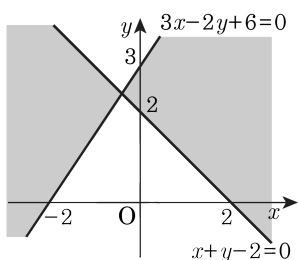
$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

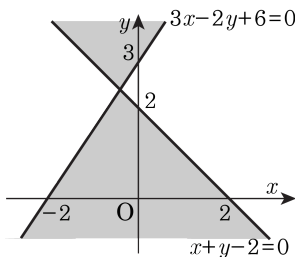
$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

5. 부등식 $(3x - 2y + 6)(x + y - 2) \geq 0$ 의 영역을 좌표평면에 바르게 나타낸 것은?

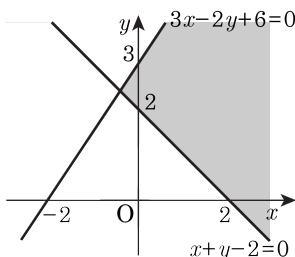
①



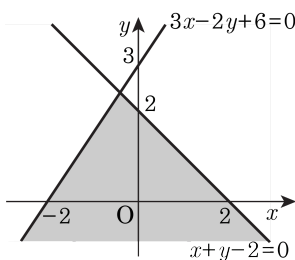
②



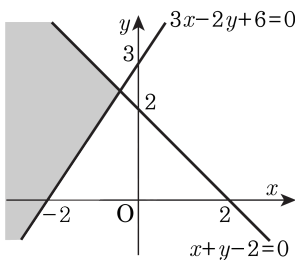
③



④



⑤



해설

부등식 $ab > 0$ 은 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 과 동치이다.
따라서 $a = 3x - 2y + 6, b = x + y - 2$ 로 놓으면 부등식을 만족하는 영역은

(ㄱ) $a > 0, b > 0$

즉 $a > 0$ 과 $b > 0$ 의 공통부분

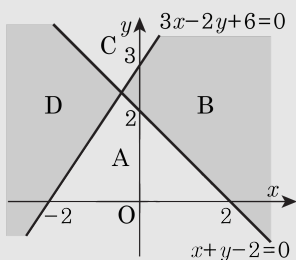
(ㄴ) $a < 0, b < 0$

즉 $a < 0$ 과 $b < 0$ 의 공통부분의 양쪽 부분이며

이들을 간단히 구하는 데에는 두 직선 $3x - 2y + 6 = 0, x + y - 2 = 0$ 으로 좌표평면을 다음 그림과 같이 네 부분으로 나누어 본다.
양의 영역, 음의 영역은 서로 교차해서 나타나므로, 원점 $(0, 0)$ 을 부등식에 대입해 보면

$(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6)(0 + 0 - 2) = -12 < 0$ 이 되어 점 $(0, 0)$ 은 부등식을 만족하지 않는다.

따라서 영역 A 는 부등식을 만족하지 않으므로 영역 B 는 부등식을 만족하고, 영역 C 는 부등식을 만족하지 않으며, 영역 D 는 부등식을 만족한다.



6. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

7. 구간 $[2, 3]$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$ 을 만족하는 실수 a 의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

① 2

② $2\sqrt{3}$

③ 3

④ $3\sqrt{2}$

⑤ 5

해설

$$[2, 3] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

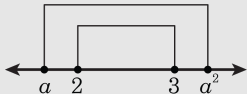
$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$$

$$(x-a)(x-a^2) \leq 0$$

$$a < x < a^2 (\because a > 1) \quad a \leq 2, a^2 \geq 3$$

$\therefore a$ 의 최댓값 : 2

a 의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore 2\sqrt{3}$



8. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right), \text{ 즉 } (-2, 6)$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$y - 6 = 1 \cdot (x + 2), \quad y = x + 8$$

$$a = 1, \quad b = 8 \quad \therefore a + b = 9$$

9. 직선 $y = -ax + 2$ 가 직선 $y = bx + 3$ 과 수직이고, 직선 $y = (b+3)x - 1$ 과는 평행하다. 이 때, $a + b + ab$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

수직조건에서 $ab = 1$ 이고,
평행조건에서 $a + b = -3$ 이다.
 $\therefore a + b + ab = -2$

10. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l , l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m , m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은

$$l : y = 2(x - \alpha) + 4$$

이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은

$$m : (-y) = 2(x - \alpha) + 4$$

n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로

$$n : (-y) = 2(-x - \alpha) + 4$$

이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로

l 과 n 이 일치하려면

$$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4 \text{ 가 되어 } \alpha = 2 \text{ 이다.}$$

11. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 을 만족하는 x 의 범위가 $-2 < x < 1$ 일 때, 부등식 $cx^2 - ax + b < 0$ 을 만족하는 x 의 범위는?

① $-2 < x < 1$

② $-1 < x < \frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{2} < x < 2$

④ $\frac{1}{2} < x < 1$

⑤ $\frac{1}{2} < x < 2$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 (a < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 < 0$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 1, \frac{c}{a} = -2$$

$cx^2 - ax + b < 0$ 에서

양변을 a 로 나누면

$$\frac{c}{a}x^2 - x + \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 > 0$$

$$2x^2 + x - 1 < 0, (2x-1)(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < \frac{1}{2}$$

12. 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ ($-1 \leq x \leq 2$) 위를 움직일 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$

② $3\sqrt{5}$

③ $4\sqrt{5}$

④ $5\sqrt{5}$

⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ 위의 점이므로

$$b = 3a + 2 \text{ (단, } -1 \leq a \leq 2) \cdots \text{㉠}$$

이 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 에서

$a + b = X$, $a - b = Y$ 로 놓고

a, b 를 X, Y 로 나타내면

$$a = \frac{X + Y}{2}, b = \frac{X - Y}{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{X - Y}{2} = \frac{3X + 3Y}{2} + 2$$

$$\therefore X + 2Y + 2 = 0$$

한편, $X = a + b = a + (3a + 2) = 4a + 2$ 이고

$$-1 \leq a \leq 2 \text{ 이므로 } -2 \leq 4a + 2 \leq 10$$

$$\therefore -2 \leq X \leq 10$$

따라서 점 $Q(x, y)$ 는

직선 $x + 2y + 2 = 0$ (단, $-2 \leq x \leq 10$) 위를 움직인다.

그런데 $x = -2$ 일 때, $y = 0$

$x = 10$ 일 때, $y = -6$ 이므로

구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2, 0), (10, -6)$ 을 이은 선분의 길이와 같다.

$$\therefore \sqrt{(10 + 2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

13. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots ①$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots ②$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots ③$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

14. $a + b = 1$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2005} + b^{2005}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$b = 1 - a$ 를 $a^2 + b^2$ 에 대입하여 정리하면

$$a^2 - a + 1 = 0 \quad (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$$

$$a^3 + 1 = 0 \quad \therefore a^3 = -1$$

마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

$$a^{2005} + b^{2005} = (a^3)^{668} \cdot a + (b^3)^{668} \cdot b = a + b = 1$$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$$a^2 - a + 1 = 0 \quad \text{에서} \quad a^2 = a - 1$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a - 1) \cdot a = a^2 - a = -1$$

마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

15. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5 + y^5 = -1$

㉡ $x^9 + y^9 = -1$

㉢ $x^{11} + y^{11} = -1$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$$

$$x^2 = -x - 1 \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 x 를 곱하면

$$x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1 \quad (\because x^2 + x = -1)$$

$$x^3 = 1, y \text{에 대해서도 마찬가지로 하면 } y^3 = 1$$

$$\text{또한 } x + y = -1, xy = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x^5 + y^5 &= x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} x^9 + y^9 &= (x^3)^3 + (y^3)^3 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} x^{11} + y^{11} &= (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

*다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0 \text{ 에서}$$

각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = 1$$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1, xy = 1$ 이므로

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore x^3 = 1, y^3 = 1$$