1. 다음 중 치역이 실수 전체의 집합인 것은 무엇인가?

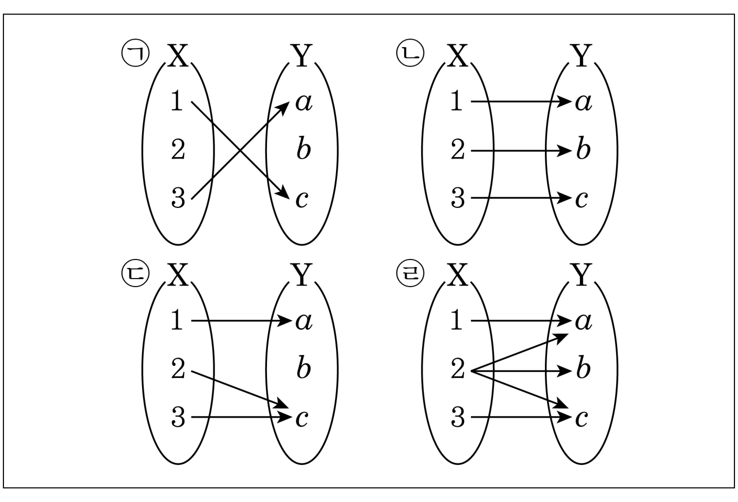
① $y=2x$ ② $y=-x^2$ ③ $y=x^2-2$

④ $y=-x^2+2x$ ⑤ $y=3$

해설

②$y \le 0$ ③$y \ge -2$ ④$y \le 1$ ⑤$y=3$

2. 다음 대응 관계 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
㉡, ㉢ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.
㉣ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

3. 두 집합 $X = \{-2,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

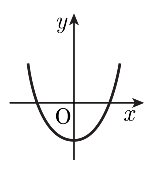
① $x \to x+1$　② $x \to x^2$　③ $x \to x-1$

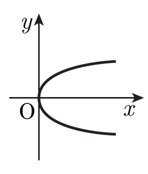
④ $x \to x+2$　⑤ $x \to 2x+1$

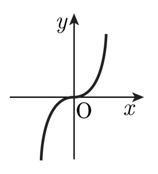
해설

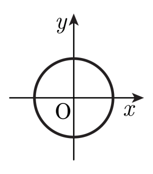
각각의 치역을 구하면
① $\{-1,\ 1,\ 2\}$
② $\{0,\ 1,\ 4\}$
③ $\{-3,\ -1,\ 0\}$
④ $\{0,\ 2,\ 3\}$
⑤ $\{-3,\ 1,\ 3\}$
따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④ 이다.

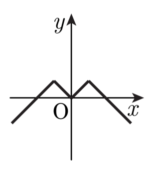
4. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

①


②


③


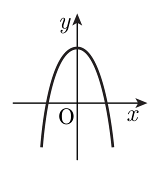
④


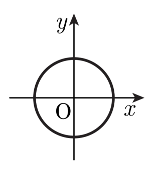
⑤


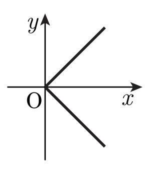
해설

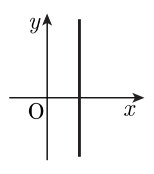
②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

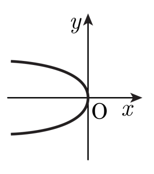
5. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

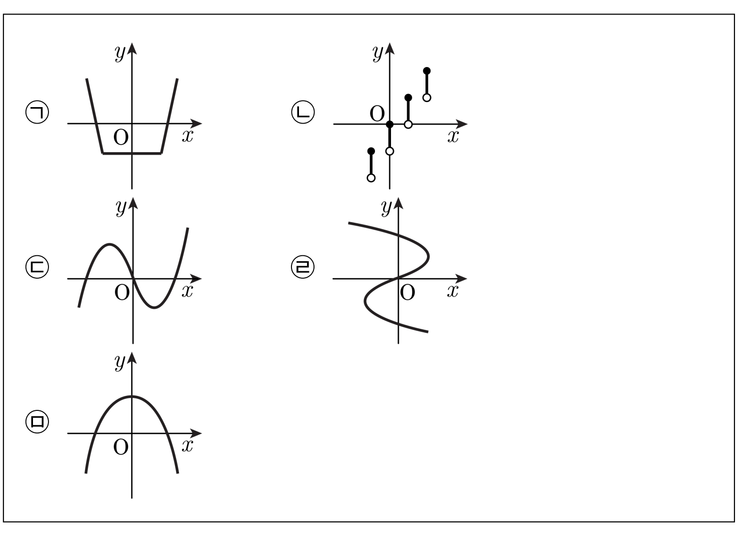
④ 

⑤ 

해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

6. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉤ ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
㉡ 함수가 아니다.
㉢ 함수
㉣ 함수가 아니다.
㉤ 함수
따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

해설

7. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 다음 성질을 만족시킨다.

Ⅰ. $f(0) = 2, f(1) = 6$
Ⅱ. $g(n) = f(n+1)$
Ⅲ. $f(n) = 2\left\{g(n+1) - g(n-1)\right\}$

이 때, $f(5)$ 의 값은?

① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

해설

Ⅱ. 에서 $g(n+1) = f(n+2),\ g(n-1) = f(n)$
Ⅲ. 에서 $f(n) = 2\left\{f(n+2) - f(n)\right\}$
$\therefore 3f(n) = 2f(n+2)$

$$f(n+2) = \frac{3}{2}f(n)$$

$$f(3) = \frac{3}{2}f(1) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

$$f(5) = \frac{3}{2}f(3) = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$$

8. 두 함수 f, g가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x-7) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(-1)$의 값은 얼마인가?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$g(3x-7) = f(x+2)$에 $x = 2$를 대입하면
$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$

9. $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \left\{y | y\text{는 정수}\right\}$ 일 때, 함수 $f : X \to Y$가 $f(x) = (x^2$ 을 5로 나눈 나머지)로 정의할 때, 함수 f의 치역에 있는 모든 원소의 합은 얼마인가?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$f(x) = (x^2$ 을 5로 나눈 나머지) 이므로

$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1,\ f(5) = 0$

$\therefore\ \{f(x) \mid x \in X\} = \{0,\ 1,\ 4\}$

따라서 모든 원소의 합은 $0 + 1 + 4 = 5$

10. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

①$f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

②$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤$f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \cdots\cdots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

11. 모든 양수 m,n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.
$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a,b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$
④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$
$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$
$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$
따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

12. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$　　② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$　　④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$f(a) + f(b) = |a| + |b|$

이 때 $|a+b| \le |a| + |b|$

② $f\ (a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤
$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3 + 3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3) \\ f(a) + f(b) &= a^3 + 3a + b^3 + 3b \\ &= a^3 + b^3 + 3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3) \end{aligned}$$

13. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

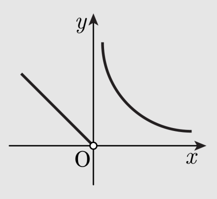
$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0)\\ -x(x<0)\end{cases}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=\frac{10}{3}$
Ⅱ. $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$
Ⅲ. $x_1>x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)$

$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

i)$x>0$ 일 때, $-x<0, \frac{1}{x}>0$ 이므로

$f(-x)=-(-x)=x,$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

ii)$x<0$ 일 때, $-x>0, \frac{1}{x}<0$ 이므로

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}$

i), ii) 에서 $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\frac{1}{3}>-2$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{3}\right)=3>2=f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

14. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x)=x^3-2x+1$, $g(x+1)=f(x+2)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$g(x+1)=f(x+2)$에 $x=-1$을 대입하면
$g(0)=f(1)$
$f(1)=1-2+1=0$
$\therefore\ g(0)=0$

15. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

16. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
$\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$f(2)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$

$=\dfrac{1+3}{1-3}=-2$

$f(3)=\dfrac{1+f(2)}{1-f(2)}$

$=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

$f(4)=\dfrac{1+f(3)}{1-f(3)}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$f(5)=\dfrac{1+f(4)}{1-f(4)}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

18. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

19. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

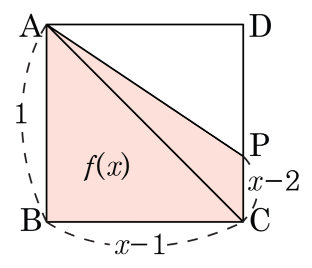
20. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$
④ $y = x^3$ ⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

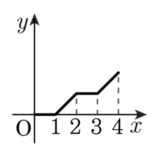
해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

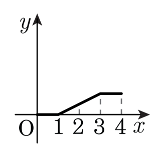
21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



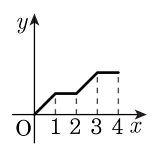
①



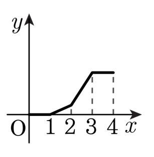
②



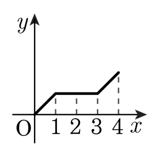
③



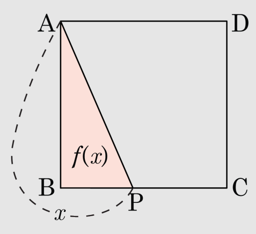
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

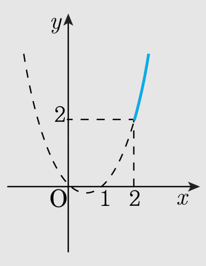
함수는 연속이므로 ②가 옳다.

22. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역) 이므로
(정의역)=(치역) 이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
$\therefore \ k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
$\therefore \ k = 2$



23. $X = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \le y \le 3\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$　② $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$　③ $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}$, $b = 0$　⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = 0$

24. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f가 $f\ : Q^+\ \rightarrow\ N \times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, $p,\ q$는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$ ② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$ ④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

①$\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

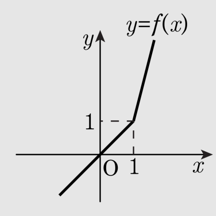
$f(x)=\begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 $a,\ b$ 의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a=1,\ b=-1$ ② $a=1,\ b=1$ ③ $a=2,\ b=-1$

④ $a=2,\ b=0$ ⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

f가 일대일대응이 되려면
$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, 직선 $y=ax+b$가
점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로
$a+b=1 \quad \cdots$ ㉠
또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선
$y=ax+b$의 기울기도 양이어야 한다.
$\therefore\ a>0 \quad \cdots$ ㉡
따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을
모두 만족시키는 것은 ③이다.



26. f : X $\rightarrow$ Y, $x \rightarrow f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$　　② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$　　④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의
「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

27. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq (x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 15개　② 60개　③ 120개
④ 125개　⑤ 243개

해설

「$x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$」는
일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1,\ 2,\ 3\}$이고
$Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
일대일 함수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$(개)

28. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \rightarrow a|x-1|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　　② $a \le -1$　　③ $a > -1$

④ $a < 1$　　⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

29. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

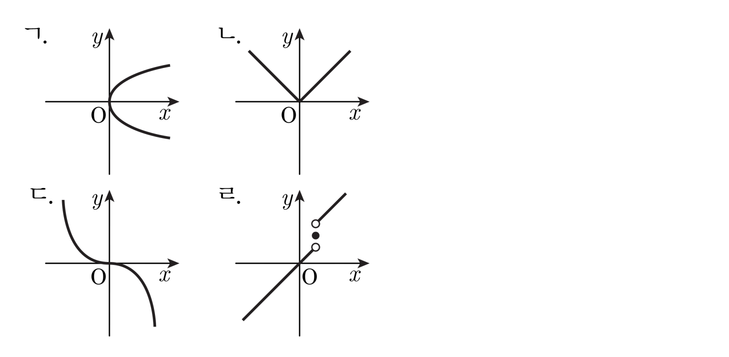
30. 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=-x+k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1)=1+k$
$f(1)=-1+k$
$f(3)=-3+k$
이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.
$\therefore X=\{1+k,\ -1+k,\ -3+k\}$
그런데 $-3+k<-1+k<1+k$ 이므로
$X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서
$-3+k=-1,\ -1+k=1,\ 1+k=3$
$\therefore k=2$

31. 다음 방정식의 자취들 중 함수인 것은 x 개, 일대일 대응인 것은 y 개이다. $x+y$ 의 값은?

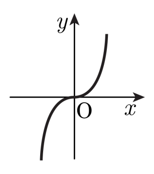


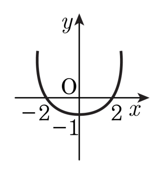
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

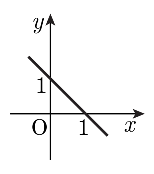
해설

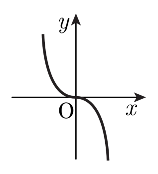
함수는 주어진 x 에 y 값이 하나씩 대응해야 한다.
따라서 ㉡, ㉢, ㉣ 이 함수이다.
일대일 대응은 함수 중에 치역과 공역이 일치하는 것을 말한다.
따라서 ㉢이 일대일 대응이다.
$\therefore \quad x+y=4$

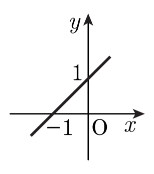
32. 다음 함수의 그래프 중 일대일 대응이 <u>아닌</u> 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

치역과 공역이 같고 임의의 두 실수
x_1 , x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때
$f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족해야하므로
정답은 ②번이다.

33. 집합 $X = \{x|x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

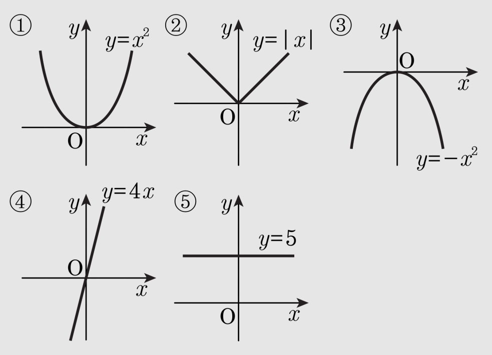
해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$
$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

34. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$ ② $f(x) = |x|$ ③ $f(x) = -x^2$
④ $f(x) = 4x$ ⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f : X \to Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

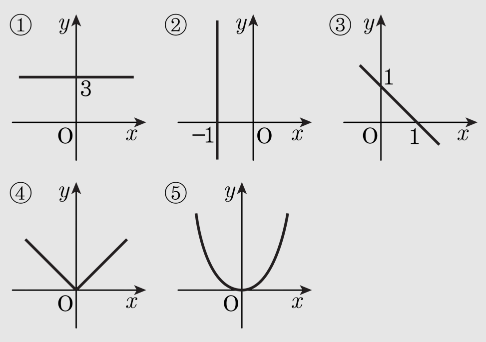
35. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

① $y=3$　　② $x=-1$　　③ $y=-x+1$

④ $y=|x|$　　⑤ $y=x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여
$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.
따라서 만족하는 함수는 ③이다.

36. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

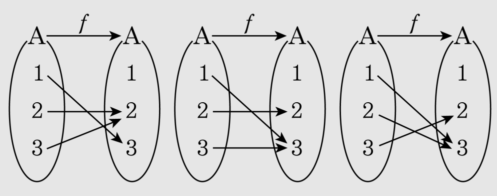
37. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$ Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개 　 ② 2 개 　 ③ 3 개 　 ④ 4 개 　 ⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

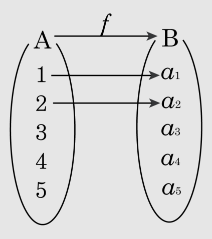
38. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개

④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



39. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \to Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

40. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개　② 20 개　③ 25 개　④ 27 개　⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

41. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times4\times1=4$ (개)

42. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$ Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$ Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

ㄱ $f(2) = 1$　　ㄴ $f(3) = 3f(1)$

ㄷ $f(-1) > f(1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.