1. 원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B+C$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -4

해설

원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원은
$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 전개하면
$x^2-2x+1+y^2+4y+4=9$
$x^2+y^2-2x+4y-4=0$
따라서 $A+B+C=-2+4-4=-2$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ 이 나타내는 도형을 바르게 설명한 것을 고르면?

① 중심 (1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
② 중심 (1, −2) 이고 반지름이 1 인 원
③ 중심 (−1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
④ 중심 (1, −2) 이고 반지름이 2 인 원
⑤ 중심 (1, 2) 이고 반지름이 2 인 원

해설
$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$
$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 1 인 원

3. 세 점 P(1, 0), Q(0, −1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $a+c$의 값은?

① −1　　② −2　　③ −3　　④ 2　　⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1+a+c=0 & \cdots ㉠ \\ 1-b+c=0 & \cdots ㉡ \\ 2a+2b+c+8=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

∴ ㉠에서 $a+c=-1$

4. 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2-4c=0$　　② $b^2+4c=0$

③ $a^2-4c=0$　　④ $a^2+b^2-4c=0$

⑤ $a^2+b^2+4c=0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 되므로
$y^2+by+c=0$ ······ ㉠
원이 y 축과 접하려면 ㉠의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$
$\therefore\ D=b^2-4c=0$

5. $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 이 원의 방정식이 되기 위한 m 의 범위는?

① $-3<m<1$ ② $-1<m<3$

③ $m<-3$ 또는 $1<m$ ④ $m<-1$ 또는 $3<m$

⑤ $0<m<3$

해설

$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$

원이 되려면 $r>0$

$\{x+(m-1)\}^2+\{y-m\}^2+m^2+2m-3=0$

$(x+m-1)^2+(y-m)^2=3-2m-m^2$

$3-2m-m^2>0 \rightarrow m^2+2m-3<0$

$\therefore -3<m<1$

6. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$
② $4x-3y+4=0$
③ $3x-3y+4=0$
④ $x-y+4=0$
⑤ $2x-y+1=0$

해설

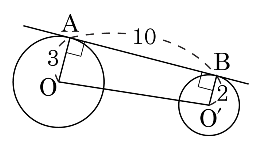
두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-\left(x^2+y^2-4y\right)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

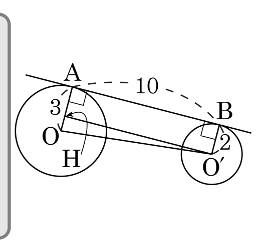
7. 다음 그림의 두 원 O, O′ 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



① $\sqrt{101}$　② $\sqrt{103}$　③ $\sqrt{105}$　④ $\sqrt{106}$　⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O′ 에서 선분 AO 에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 OO′H 에서
$\overline{OO'} = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



8. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\dfrac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$　　② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$　　④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

10. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

11. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -5 ⑤ -2

해설
접점 $(2,\ -1)$ 에서의 접선의 방정식은
$2x-y=5$
$\Rightarrow\ y=2x-5 \quad \therefore\ ab=-10$

12. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

13. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1} = 3$

14. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

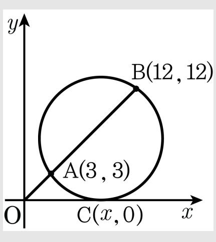
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

15. 좌표평면 위의 두 점 (3, 3), (12, 12) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

16. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

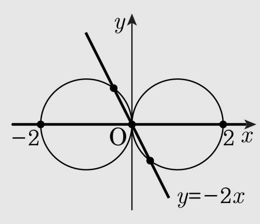
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

17. 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+y^2=1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2 인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 3)$ ② $(3,\ -3)$ ③ $(4,\ \pm 4)$

④ $(\pm 4,\ 4)$ ⑤ $(4,\ \pm 3)$

해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.
중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면,
$\Rightarrow$ i) $a^2+b^2=25$
ii) $(a-4)^2+b^2=9$ 연립하면,
$a=4,\ \ b=\pm 3$
$\therefore$ 중심은 $(4, \pm 3)$

18. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{101}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{105}}{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{110}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{115}}{5}$

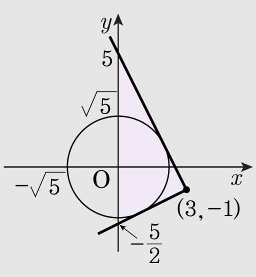
해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠
원 C_3 의 방정식을 변형하면
$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,
두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡
두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로
$\dfrac{2a-4}{2}=\dfrac{2b-4}{1}=\dfrac{a^2+b^2-29}{6}$
$\dfrac{2a-4}{2}=\dfrac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$
$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢
$\dfrac{2b-4}{1}=\dfrac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면
$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$
$5b^2-20b-1=0$
$\therefore b=\dfrac{10\pm\sqrt{105}}{5}$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\dfrac{10+\sqrt{105}}{5}$
$\therefore a-b=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$

19. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

해설



점 $(3,\ -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을
$y+1=m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심에서 직선 $y+1=m(x-3)$,
즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면,

$2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$, $y=-2x+5$ 이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\dfrac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\dfrac{45}{4}$ 이다.

$\therefore\ 4S=45$

20. 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=20$ 밖의 한 점 P에서 그은 접선이 수직으로 만날 때, 다음 중 점 P가 될 수 없는 점을 고르면?

① $(-7,\ 8)$ ② $(-3,\ 12)$ ③ $(1,\ 0)$

④ $(3,\ 1)$ ⑤ $(5,\ 4)$

해설

점 P에서 그은 접선이 수직으로 만나려면 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 정사각형이 되어야 한다.

이 때 점 P와 중심사이의 거리는 정사각형의 대각선 길이인 $2\sqrt{10}$ 이어야 한다. 원의 중심 $(-1,\ 6)$과 보기에 나와 있는 점들 사이의 거리를 구했을 때, 중심과 점 $(3,\ 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(3-(-1))^2+(1-6)^2}=\sqrt{41}$