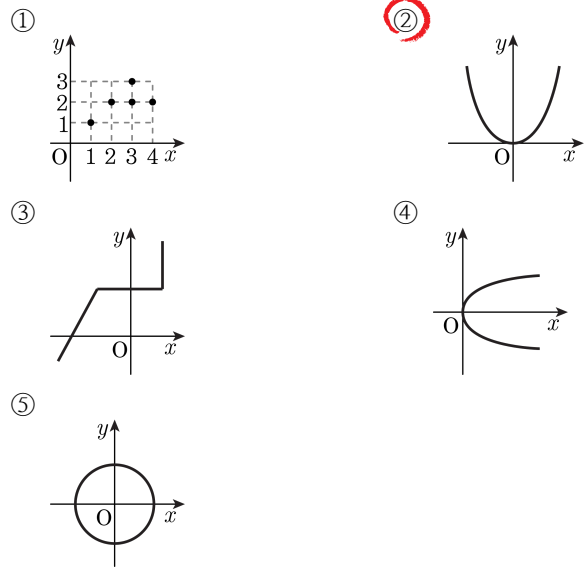
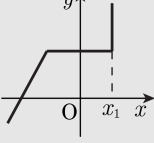


1. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

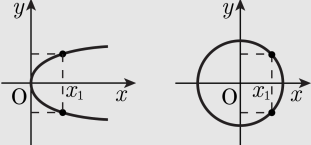


해설

X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.
① $f(3) = 2, f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.
③ x_1 에 대응하는 y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.



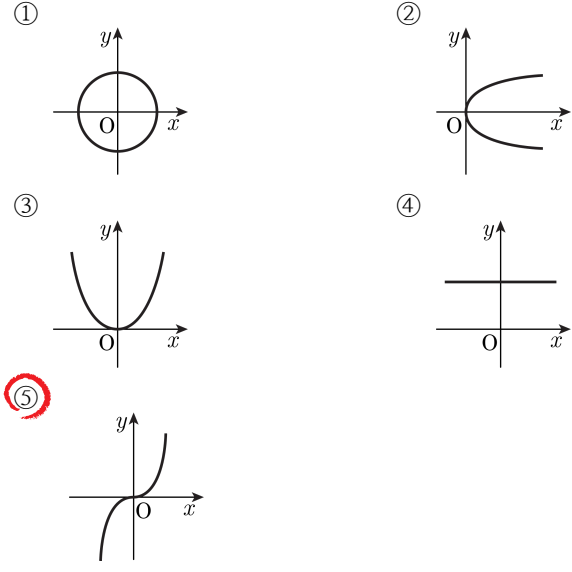
2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$
 $(3, 2, 1)$ 이므로
 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

3. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

4. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $y = \frac{1}{2}x + 1$

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

해설

$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

$x = \frac{1}{2}y + 1$ x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1$

5. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?
- ① $y = -x^2$

② $y = -|x|$

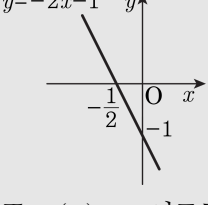
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로 일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로 일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로 일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로 일대일대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로 일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역) 이다.

6. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

7. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

8. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

함성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

9. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

10. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a$, $g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

정의역 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로

$f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 가 성립한다.

$f(1) = g(1)$ 에서 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$

$\therefore a - b = -1 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) = g(2)$ 에서 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$

$\therefore a - 2b = -5 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 4$

$\therefore a + b = 7$

11. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

12. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

13. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

14. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = -2(4ax + 4b + 1) + 3$$

$$= -8ax - 8b - 2 + 3$$

$$= 4x + 1$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

15. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

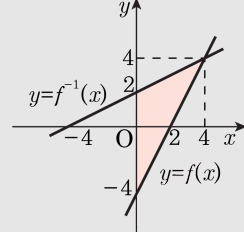
$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

16. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의
그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기
위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
 $\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로

그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

17. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ $f(3) = 4$
- ㉡ $0 \leq f(n) \leq 4$
- ㉢ $f(n) = 2$ 인 자연수 n 은 없다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f(3)$ 은 3^2 을 오진법으로 표시한 일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서 $f(3) = 4$ $\therefore$ 참
㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4만이 올 수 있으므로 $0 \leq f(n) \leq 4$ $\therefore$ 참
㉢. $f(n) = 2$ 이므로 $n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$ ($p_i = 0, 1, 2, 3, 4$)의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉, n^2 을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다. 그런데 정수 l 에 대하여
i) $n = 5l$ 이면 $n^2 = 25l^2$ 즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ii) $n = 5l + 1$ 이면 $n^2 = (5l + 1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$ 즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
iii) $n = 5l + 2$ 이면 $n^2 = (5l + 2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$ 즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
iv) $n = 5l + 3$ 이면 $n^2 = (5l + 3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$ 즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
v) $n = 5l + 4$ 이면 $n^2 = (5l + 4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$ 즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n 은 i), ii), iii), iv), v) 중 어느 한 꼴로 표현이 가능하므로 5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
 $\therefore$ 참

18. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

19. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

20. 자연수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \text{는 홀수}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{는 짝수}) \end{cases} \quad \text{로 정의할 때, } f(f(x)) = 2 \text{를 만족시키}$$

는 x 의 값들의 합은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$ 에서 $f(x) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a 가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a 가 짝수일 때 $f(a) = \frac{a}{2} = 2 \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x 가 홀수이면 존재하지 않고

x 가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$ 일 때 x 가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$