1. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$　　② $\{0,\ 1\}$　　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$
④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면$0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. 명제「$x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례 : $x = -5$)

3. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

4. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$' 이므로 '$xy = yz = zx$'의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

5. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

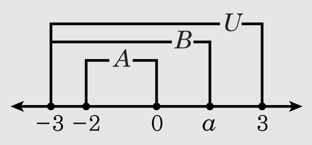
6. $U=\{x|-3\le x\le 3\}$, $A=\{x|-2\le x\le 0\}$, $B=\{x|-3\le x\le a\}$ 라고 할 때, $B^c\subset A^c$가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c\subset A^c \leftrightarrow\ A\subset B$이므로 위의 그림에서 $0\le a\le 3$ $\therefore$ a의 최댓값은 3이다.



7. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

8. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$

9. 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 다음에서 옳은 것을 고르면?

㉠ 첫번째 구슬은 빨간색이 아니다.
㉡ 두번째 구슬은 파란색이 아니다.
㉢ 세번째 구슬은 파란색이다.

① 첫번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

해설

㉢이 참이면 ㉡도 참이 되어 모순.
㉠이 거짓이고 ㉡가 참이면 ㉢이 참이 되어 모순 ∴ ㉠이 참이고, ㉡, ㉢이 거짓이다.
∴ 첫번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

10. 다음은 명제 '정수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 <u>틀린</u> 것은?

> 주어진 명제의 대우인 '정수 x, y, z에 대하여 $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.' 가 참임을 증명해 보자.
> $x,\ y,\ z$ 가 모두 3의 배수가 아니면,
> $x,\ y,\ z$ 는 각각 $x = 3l \pm 1,\ y = 3m \pm 1,\ z = 3n \pm 1$ ($l,\ m,\ n$ 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때,
> $x^2 + y^2 = (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$
> $\qquad = 9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1$
> $\qquad = 9(l^2 + m^2) \pm 6(l + m) + 2$
> 또는
> $x^2 + y^2 =$(나)
> $\qquad =$ (다)
> $\qquad = 9(l^2 + m^2) \pm 6(l - m) + 2$
> 한편,
> $z^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1$
> 따라서, $x^2 + y^2 \neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제 '$x^2 + y^2 = z^2$ 이면 $x,\ y,\ z$ 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 는 (마)이다.

① (가) $x^2 + y^2 \neq z^2$

② (나) $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$

③ (다) $9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \mp 6m + 1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

$x^2 + y^2$ 는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$ 또는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \mp 1)^2$

11. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 <u>아닌</u> 것을 찾으면? (단, α,β 는 실수)

① $\alpha\beta<1$ ② $\alpha\beta=-1$ ③ $\alpha\beta=0$

④ $\alpha^2+\beta^2=0$ ⑤ $\alpha^2-\beta^2=0$

해설

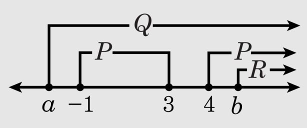
$|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta=2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta=0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha\beta<1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta<1$ 는 $\alpha\beta=0$의 필요조건이다.

12. $-1 \le x \le 3$ 또는 $x \ge 4$이기 위한 필요조건은 $x \ge a$ 이고, 충분조건은 $x \ge b$일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$P = \{x \mid -1 \le x \le 3 \ or \ x \ge 4\}$, $Q = \{x \mid x \ge a\}$, $R = \{x \mid x \ge b\}$
이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$a \le -1, \quad b \ge 4$

$\therefore -1 + 4 = 3$

13. 양수 $a,\ b$가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P=Q$

④ $P<Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

$a,\ b$는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1,\ 0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$\begin{aligned} P &= a^3+b^3=a^3+(1-a)^3 \\ &= a^3+1-3a+3a^2-a^3 \\ &= 3a^2-3a+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= a^2+b^2=a^2+(1-a)^2 \\ &= a^2+a^2-2a+1 \\ &= 2a^2-2a+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P-Q &= 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1 \\ &= a^2-a=a(a-1) \end{aligned}$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

14. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+4y^2+4xy+10x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=20,\ b>25$　　② $a=20,\ b<25$

③ $a=20,\ b\ge 25$　　④ $a=20,\ b\le 25$

⑤ $a=20,\ b\ne 25$

해설

준식을 x에 관하여 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0\cdots$㉠

㉠이 x의 모든 실수값에 대하여 성립하려면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$\therefore\ (a-20)y+b-25>0\cdots$㉡

㉡이 모든 y에 대하여 성립하려면 $a=20$이고 $b>25$이다.

15. 임의의 실수 x, y에 대한 부등식 $|x-y| \le |x|+|y|$에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x \le 0,\ y \ge 0$　　② $x \ge 0,\ y \le 0$　　③ $y = -x$

④ $xy < 0$　　⑤ $xy \le 0$

해설

$|x-y| = |x|+|y|$에서 양변을 제곱하여 정리하면 $-2xy = 2|xy|$,
$|xy| = -xy,\ xy \le 0$ 역으로 $xy \le 0$이라 가정하면

ⅰ) $x = 0$또는 $y = 0$ 일 때 등식은 성립하고

ⅱ) $xy < 0$ 일 때도 등식은 성립한다.

$\therefore\ |x-y| \le |x|+|y| \Leftrightarrow xy \le 0$

16. $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$인 실수 $x,\ y,\ z$가 $x + y + z = 2$를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$가 가질 수 있는 값의 범위는?

① $1 < k \le \frac{4}{3}$　② $1 \le k < \frac{4}{3}$　③ $0 < k < 2$
④ $0 < k \le 2$　⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1,\ y < 1$에서 $1 - x > 0,\ 1 - y > 0$이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
양변에 $x + y - 1$을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면
$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$
마찬가지방법으로 $yz,\ zx$를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1-x)(1-y) - (1-x-y) > x+y-1 \\ yz = (1-y)(1-z) - (1-y-z) > y+z-1 \\ zx = (1-z)(1-x) - (1-z-x) > z+x-1 \end{cases}$$ 에서

$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
또, $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$에서 ($\because\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge 0$에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$를 더한다)
$4 \ge 3(xy + yz + zx)$
$\therefore\ 1 < xy + yz + zx \le \frac{4}{3}$

17. 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c)\le kabc$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{7}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$s-a=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)>0$

($\because a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s-b>0,\ s-c>0$

(산술평균)≥(기하평균) 이므로

$2\sqrt{(s-a)(s-b)}\le(s-a)+(s-b)=c$

(등호는 $a=b$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-b)(s-c)}\le(s-b)+(s-c)=a$

(등호는 $b=c$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-c)(s-a)}\le(s-c)+(s-a)=b$

(등호는 $c=a$일 때 성립)

변변 곱하면 $8(s-a)(s-b)(s-c)\le abc$

$\therefore (s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{1}{8}abc$

(등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore k=\frac{1}{8}$

18. x, y는 양수이고 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=3$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x+y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot (x+y)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{y}\right)(x+y)$

$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\right)\geq\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)$

$=\frac{1}{3}(10+8)=6$

19. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2+$ ㉡ 하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

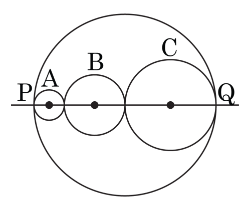
$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\le -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

20. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　　② $6\sqrt{35}$　　③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$　　⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$