

1. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\emptyset$

② $\{0, 1\}$

③ $\{3, 4, 5\}$

④ $\{2, 3, 4, 5\}$

⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)

$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)

$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)

$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)

따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

2. 명제「 $x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.

(역의 반례 : $x = -5$)

3. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

4. 명제 ‘모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?
- ① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.
 - ② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
 - ③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
 - ④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.
 - ⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘ $xy = yz = zx$ ’는 ‘ $xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ’이므로
‘ $xy = yz = zx$ ’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$
이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여
 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

5. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$$

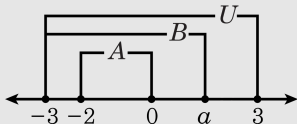
6. $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 라고 할 때, $B^c \subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$B^c \subset A^c \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0 \leq a \leq 3 \therefore a$ 의 최댓값은 3이다.



7. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$$\therefore n = 1, 2$$

n 의 갯수는 2 개이다.

8. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

9. 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 다음에서 옳은 것을 고르면?

- ㉠ 첫번째 구슬은 빨간색이 아니다.
- ㉡ 두번째 구슬은 파란색이 아니다.
- ㉢ 세번째 구슬은 파란색이다.

- ① 첫번째 구슬이 빨간색이다.
- ② 첫번째 구슬이 파란색이다.
- ③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
- ④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
- ⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

해설

㉢이 참이면 ㉡도 참이 되어 모순.

㉠이 거짓이고 ㉡가 참이면 ㉢이 참이 되어 모순. ∴ ㉠이 참이고, ㉡, ㉢이 거짓이다.

∴ 첫번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

10. 다음은 명제 ‘정수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우인 ‘정수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면 (가)이다.’가 참임을 증명해 보자.

x, y, z 가 모두 3의 배수가 아니면,

x, y, z 는 각각 $x = 3l \pm 1, y = 3m \pm 1, z = 3n \pm 1$ (l, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.

이때,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l + m) + 2 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\text{나}) \\ &= (\text{다}) \\ &= 9(l^2 + m^2) \pm 6(l - m) + 2 \end{aligned}$$

한편,

$$z^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1$$

따라서, $x^2 + y^2 \neq z^2$ 이므로 주어진 명제의 대우는 (라)이다.

그러므로 주어진 명제 ‘ $x^2 + y^2 = z^2$ 이면 x, y, z 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’는 (마)이다.

① (가) $x^2 + y^2 \neq z^2$

② (나) $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$

③ (다) $9l^2 \pm 6l + 1 + 9m^2 \mp 6m + 1$

④ (라) 참

⑤ (마) 참

해설

$x^2 + y^2$ 는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$ 또는 $(3l \pm 1)^2 + (3m \mp 1)^2$

11. 다음 중 명제 $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으려면? (단, α, β 는 실수)

① $\alpha\beta < 1$

② $\alpha\beta = -1$

③ $\alpha\beta = 0$

④ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

⑤ $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta \\ \rightarrow \alpha\beta = 0$$

0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha\beta < 1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta < 1$ 는 $\alpha\beta = 0$ 의 필요조건이다.

12. $-1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ 이기 위한 필요조건은 $x \geq a$ 이고, 충분조건은 $x \geq b$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

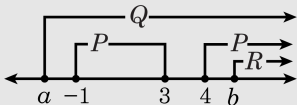
④ 2

⑤ 3

해설

$P = \{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 4\}$, $Q = \{x \mid x \geq a\}$, $R = \{x \mid x \geq b\}$

이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$$a \leq -1, \quad b \geq 4$$

$$\therefore -1 + 4 = 3$$

13. 양수 a, b 가 $a+b=1$ 을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3, Q=a^2+b^2$ 의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$

② $P \geq Q$

③ $P = Q$

④ $P < Q$

⑤ $P \leq Q$

해설

a, b 는 양수이고 $a+b=1$ 이므로

$$0 < a < 1, 0 < b < 1$$

또 $b=1-a$ 이므로

$$P = a^3 + b^3 = a^3 + (1-a)^3$$

$$= a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3$$

$$= 3a^2 - 3a + 1$$

$$Q = a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2$$

$$= a^2 + a^2 - 2a + 1$$

$$= 2a^2 - 2a + 1$$

$$P - Q = 3a^2 - 3a + 1 - 2a^2 + 2a - 1$$

$$= a^2 - a = a(a-1)$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a(a-1) < 0$

$\therefore P - Q < 0$ 이고 $P < Q$

14. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 4y^2 + 4xy + 10x + ay + b > 0$ 이 성립할 a, b 의 조건은? (단, a, b 는 실수)

① $a = 20, b > 25$

② $a = 20, b < 25$

③ $a = 20, b \geq 25$

④ $a = 20, b \leq 25$

⑤ $a = 20, b \neq 25$

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠이 x 의 모든 실수값에 대하여 성립하려면

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (a - 20)y + b - 25 > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡이 모든 y 에 대하여 성립하려면 $a = 20$ 이고 $b > 25$ 이다.

15. 임의의 실수 x, y 에 대한 부등식 $|x - y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x \leq 0, y \geq 0$

② $x \geq 0, y \leq 0$

③ $y = -x$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

$|x - y| = |x| + |y|$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면 $-2xy = 2|xy|$,

$|xy| = -xy$, $xy \leq 0$ 역으로 $xy \leq 0$ 이라 가정하면

i) $x = 0$ 또는 $y = 0$ 일 때 등식은 성립하고

ii) $xy < 0$ 일 때도 등식은 성립한다.

$\therefore |x - y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

16. $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ 인 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$ 를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$ 가 가질 수 있는 값의 범위는?

- ① $1 < k \leq \frac{4}{3}$ ② $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ③ $0 < k < 2$
 ④ $0 < k \leq 2$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1$, $y < 1$ 에서 $1 - x > 0$, $1 - y > 0$ 이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
 양변에 $x + y - 1$ 을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$$

마찬가지방법으로 yz , zx 를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

또, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ 에서 ($\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$
 에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$ 를 더한다)

$$4 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$$

17. 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 라 할 때,
 $(s-a)(s-b)(s-c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$$s-a = \frac{1}{2}(a+b+c) - a = \frac{1}{2}(-a+b+c) > 0$$

($\because a, b, c$ 는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s-b > 0, s-c > 0$

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로

$$2\sqrt{(s-a)(s-b)} \leq (s-a) + (s-b) = c$$

(등호는 $a=b$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq (s-b) + (s-c) = a$$

(등호는 $b=c$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s-c)(s-a)} \leq (s-c) + (s-a) = b$$

(등호는 $c=a$ 일 때 성립)

$$\text{변변 곱하면 } 8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$$

$$\therefore (s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{8}abc$$

(등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

18. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x + y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) (x + y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8 \right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) \\&= \frac{1}{3}(10 + 8) = 6\end{aligned}$$

19. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때, $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \text{㉠}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \text{㉡}$$

㉠ $\times 2 +$ ㉡ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

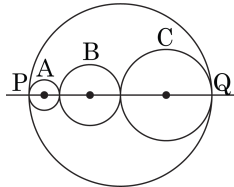
$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

20. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$

② $6\sqrt{35}$

③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$

⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
구의 겹넓이는

$$S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$$

$$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$