

1. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
□이라 놓을 수 있다.
 $7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
 $= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
 $= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
 $= 3(7m' + 4^k)$
.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

2. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{A}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{A}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ 이 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{\text{(가)}} = k^2 + \boxed{\text{(가)}} = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{A}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{A}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① $2k - 1, (k + 1)^2$

③ $2k, (k + 1)^2$

⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

② $2k, k + 1$

④ $2k + 1, k + 1$

3. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 1 \cdot 2 = 2$, (우변) $= (1 - 1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$
 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
 $= (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
 따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
 ② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$
 ③ (가) : $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
 ④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$
 ⑤ (가) : $(k + 1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k + 1$

4. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, (우변) $= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{(가)}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

5. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1) \cdot 2^n$
 $= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots \textcircled{1}$
 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변)= (우변)=2
 (ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.
 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할

때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{1024}$

② $\frac{1}{512}$

③ 512

④ 1024

⑤ 2048

6. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $2^{4+2} + 3^{1+2} = 91 = 13 \cdot 7$ 로 13의 배수이다

(ii) $n = k$ (k 는 자연수) 일 때 성립한다고 가정하면
 $2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m$ (m 은 자연수)
 $2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} = \ominus \cdot 2^{4k+2} + \textcircled{\small L} \cdot 3^{k+2}$
 $= \ominus \cdot 13m + \textcircled{\small E} \cdot 3^{k+2}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 의 13의 배수이다.

위

의 증명에서 $\ominus, \textcircled{\small L}, \textcircled{\small E}$ 에 알맞은 수들의 합은?

- ① 1
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 8

7. 다음은 모든 자연수 N 에 대하여 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 1^3 = 1$, (우변) $= 1^2 = 1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$
양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + \boxed{(가)}$
 $= (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k + 1$, (나) : k^3

② (가) : k^3 , (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

③ (가) : k^3 , (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

④ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

⑤ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

8. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$ 안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$$

(i) $n = 2$ 일 때, (좌변) $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
(우변) $= \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{2}$ 이므로 양변
에 $\left(1 + \frac{1}{\square}\right)$ 을 곱하면
 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$
 $= \frac{k+1}{2}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k+2}{2} = \frac{(\square)+1}{2}$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)
에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이
성립한다.

 답: _____

9. 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\square$ 안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수이다.㉠

(i) $n = 1$ 일 때, $6 - 5 - 1 = 0$ 이므로 $\square$ 의 배수이다.
따라서 $n = 1$ 일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$ 이 25의 배수이면

$6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$ 는 $\square$ 의 배수이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

 답: _____

10. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이
성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를
구하여라.

(i) $n = 1$ 일 때

(좌변) $= \frac{1}{(2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)} = \frac{1}{3}$

(우변) $= \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$ 이므로
등식은 성립한다.

(ii) $n = i$ ($i > 1$) 일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$

등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\square)}$ 을 더하면

(좌변)

$= \sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(우변)

$= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$

따라서, $n = i+1$ 일 때 등식은 성립한다.

그러므로 (i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n 에
대하여 성립한다.

 답: _____