1. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$

$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$

② $2k,\ k+1$

③ $2k,\ (k+1)^2$

④ $2k+1,\ k+1$

⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

3. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
$= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> (좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}=\dfrac{1}{3}$
>
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$
>
> 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\dfrac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+3}$

5. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

6. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $2^{4+2}+3^{1+2}=91=13\cdot 7$로 13의 배수이다

(ii) $n-k$(k는 자연수) 일 때 성립한다고 가정하면

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}=㉠\cdot 2^{4k+2}+㉡\cdot 3^{k+2}$

$=㉠\cdot 13m+㉢\cdot 3^{k+2}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 $2^{4n+2}+3^{k+2}$은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$ 의13의 배수이다.

위의 증명에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 수들의 합은?

① 1 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

7. 다음은 모든 자연수 N에 대하여
$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=1^2=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{\text{(가)}}$
> $=(1+2+3+\cdots+k)^2+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k+1$, (나) : k^3

② (가) : k^3, (나) : $\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

③ (가) : k^3, (나) : $\left\{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

④ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

⑤ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

8. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

> (i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,
>
> (우변)$=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.
>
> (ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
>
> $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)$을 곱하면
>
> $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$
>
> $=\dfrac{k+1}{2}\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{k+2}{2}=\dfrac{(\square)+1}{2}$
>
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답: __________

9. 모든 자연수 n에 대하여 6^n-5n-1은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> 6^n-5n-1은 25의 배수이다. ⋯⋯ ㉠
>
> (i) $n=1$일 때, $6-5-1=0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, 6^k-5k-1이 25의 배수이면
> $6^{k+1}-5(k+1)-1=\boxed{}(6^k-5k-1)+25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답:

10. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. $\boxed{}$안에 알맞은 수를 구하여라.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$= \dfrac{1}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)} = \dfrac{1}{3}$

(우변)$= \dfrac{1}{2\times 1+1} = \dfrac{1}{3}$이므로

등식은 성립한다.

(ii) $n=i\ (i>1)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{i} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{i}{2i+1}$

등호의 양변에 $\dfrac{1}{(2i+1)(2i+\boxed{})}$을 더하면

(좌변)

$= \sum_{k=1}^{i} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \dfrac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \sum_{k=1}^{i+1} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(우변)

$= \dfrac{i}{2i+1} + \dfrac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \dfrac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \dfrac{i+1}{2i+3} = \dfrac{i+1}{2(i+1)+1}$

따라서, $n=i+1$일 때 등식은 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n에 대하여 성립한다.

답: ____________