1. 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 4 의 배수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $10 \in A$ ② $14 \in A$ ③ $16 \notin A$
④ $18 \notin A$ ⑤ $20 \in A$

해설
집합 A 의 원소는 12, 16 이므로 $18 \notin A$ 이다.

2. 다음 중 공집합인 것은?

① $\{x|x$는 분모가 7인 기약분수$\}$

② $\{x|x$는 9의 배수 중 짝수$\}$

③ $\{x|x$는 11 미만의 홀수$\}$

④ $\{x|1 < x \le 2,\ x$는 자연수$\}$

⑤ $\{x|x$는 1보다 작은 자연수$\}$

해설

① $\left\{\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \cdots\right\}$

② $\{18,\ 36,\ 54,\ \cdots\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

④ $\{2\}$

3. 집합 $A = \{0, 1, \varnothing, \{0, 1\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $0 \subset A$　　② $\varnothing \in A$　　③ $\varnothing \subset A$

④ $\{0, 1\} \in A$　　⑤ $\{0, 1\} \subset A$

해설

0은 A 의 원소이므로 기호 $\in$를 사용해야 한다.

4. 세 집합 A, B, C 가 $A \subset B \subset C$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset \varnothing$　② $C \not\subset B$　③ $A \subset C$

④ $B \subset A$　⑤ $C \subset A$

해설

① A 가 공집합인지는 알 수 없다.
② $B = C$ 이면, $C \subset B$ 이다.
④ $A \neq B$ 이면, $B \not\subset A$ 이다.
⑤ $A \neq C$ 이면, $C \not\subset A$

5. 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 8 개　② 12 개　③ 16 개　④ 20 개　⑤ 24 개

해설

$2^4 = 16$ (개)

6. $A = \{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 14\}$, $B = \{x \mid x$는 24의 약수$\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?

① $\{1,\ 3,\ 6,\ 8\}$

② $\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

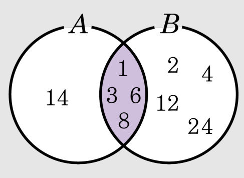
③ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 14,\ 24\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 24\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다. 다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



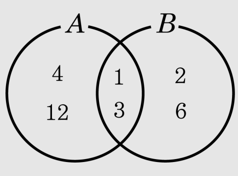
그러므로 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 24\}$ 가 된다.

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$이고, $A \cup B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $A \cap B = \{x \mid x$는 3이하의 홀수$\}$일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

① 4 ② 5 ③ 13 ④ 16 ⑤ 20

해설

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $A \cap B = \{1,\ 3\}$



$\therefore A = \{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$

따라서 집합 A 의 원소의 합은 $1 + 3 + 4 + 12 = 20$

8. 두 집합 $A=\{2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $B=\{5, 9, 10, 11, 13\}$ 에서 $A\cap X=X$, $B\cup X=B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

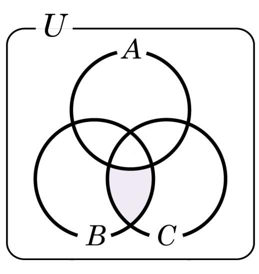
▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A\cap X=X$ 에서 $X\subset A$,
$B\cup X=B$ 에서 $X\subset B$ 이므로
$X\subset A\cap B=\{5,\ 9,\ 10\}$
집합 X 는 $\{5,\ 9,\ 10\}$ 의 부분집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^3=8$ (개)

9. 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $(B \cup C) - A$

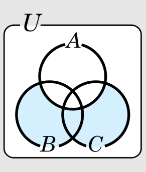
② $(B \cap C)^c \cap A$

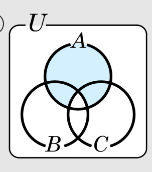
③ $(B - A) \cap (C - A)$

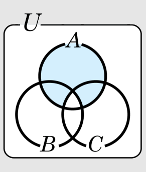
④ $(A - B) \cup (A - C)$

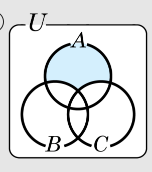
⑤ $(A - B) - C$

해설

①


②


④


⑤


10. $U = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 7\}$, $B = \{1, 2, 7, 8\}$ 에 대하여 $B - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{8\}$ ③ $\{1, 8\}$ ④ $\{4, 7\}$ ⑤ $\{4, 8\}$

해설

$B - (A \cap B) = B - A = \{1, 2, 7, 8\} - \{2, 4, 7\} = \{1, 8\}$ 이다.

11. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2 \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

12. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

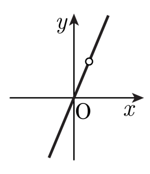
13. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

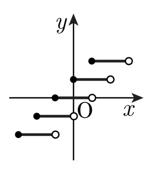
① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$
④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

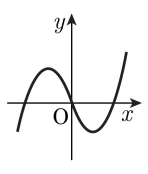
해설

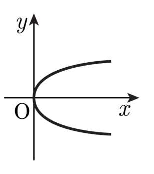
$|x+y|=|x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$xy=|xy|$
(ⅰ) $xy=|xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$
(ⅱ) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy=|xy|$
(ⅰ), (ⅱ) 에서
$xy=|xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

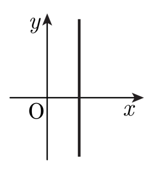
14. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x에서 y로의 함수인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

①은 대응되지 못하는 x의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x의 한 값에
y의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

15. 두 함수 f, g를 $f(x)=x-1$, $g(x)=2x+4$로 정의할 때, $(f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f)(3)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f$

$=f\cdot(f^{-1}\cdot g^{-1})\cdot f$

$=g^{-1}\cdot f$

$\therefore\ (f\cdot(g\cdot f)^{-1}\cdot f)(3)$

$=(g^{-1}\cdot f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

이 때, $g^{-1}(2)=a$라 하면

$g(a)=2$에서 $2a+4=2$

$\therefore\ a=-1$

16. 다음에서 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① 우리 중학교에서 키가 큰 학생의 모임
② 우리 중학교에서 학급 회장들의 모임
③ 0 보다 크고 1 보다 작은 자연수의 모임
④ 가장 작은 자연수의 모임
⑤ 0 에 가장 가까운 분수의 모임

해설
① '키가 큰' 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.
⑤ 0 에 가장 가까운 분수는 알 수 없다.

17. 다음 중 옳은 것은?

① $A=\{1,\ 3,\ 5\}$ 이면 $n(A)=5$

② $A=\left\{x|x \text{ 는 } 6\text{의 약수}\right\}$ 이면 $n(A)=6$

③ $n(\{a,\ b,\ c\})-n(\{a,\ b\})=\{c\}$

④ $n(\{0,\ 1,\ 2\})=3$

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 3\}-n(\{1,\ 2\})=3$

해설

① $n(A)=3$
② $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이므로, $n(A)=4$
③ $n(\{a,\ b,\ c\})-n(\{a,\ b\})=3-2=1$
④ $n(\{1,\ 2,\ 3\})-n(\{1,\ 2\})=1$

18. $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$,
$B^c = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$ 일 때, $A^c - B^c$ 은?

① $\{3, 5\}$ ② $\{3, 7\}$ ③ $\{3, 5, 7\}$
④ $\{3, 5, 7, 9\}$ ⑤ $\{3, 5, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B^c = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
$A^c - B = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\} - \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

19. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $q \to p$　　② $r \to q$　　③ $r \to p$
④ $\sim q \to \sim r$　　⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P$이므로 $Q \subset P$,
$Q \cap R = R$이므로 $R \subset Q$
따라서 $R \subset Q \subset P$
$\therefore$ $r \Rightarrow q \Rightarrow p$에서 $r \Rightarrow p$의 대우는 $\sim p \Rightarrow \sim r$
따라서 ⑤는 참인 명제라 할 수 없다.

20. 명제 「$0 < x < 1$ 이면 $|x-a| < 1$ 이다.」가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 때 정수의 개수는 ?

① 1개 ② 2개 ③ 0개 ④ 3개 ⑤ 5개

해설

$|x-a| < 1$에서 $-1 < x-a < 1$

$\therefore a-1 < x < a+1$

$\{x \mid 0 < x < 1\} \subset \{x \mid a-1 < x < a+1\}$ 이어야 한다.

$\therefore a-1 \le 0,\ a+1 \ge 1$ 에서 $0 \le a \le 1$

$\therefore\ a = 0,\ 1$

$\therefore$ 정수의 개수는 2개

21. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 <u>아닌</u> 것은?

① $p : x = -1,\ q : |x| = 1$

② p : $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$, q : $\triangle$ABC 는 이등변삼각형

③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, $a,\ b$ 는 실수), $q : a = b = 0$

④ $p : x + y \geq 2,\ xy \geq 1,\ q : x \geq 1,\ y \geq 1$

⑤ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

해설

① 두 조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하면 $P = \{-1\}$, $Q = \{-1,\ 1\}$ 이므로 $P \subset Q,\ Q \not\subset P$
따라서, $p \Rightarrow q,\ q \not\Rightarrow p$ 이므로
p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이면 $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그런데 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 인 것은 아니다.
$\therefore q \not\Rightarrow p$

③ $a,\ b$ 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x + y \geq 2,\ xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 인 것은 아니다.
$\therefore\ p \not\Rightarrow q$

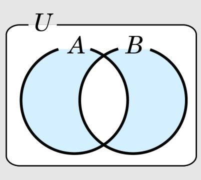
⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

22. 다음 중에서 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) = B\cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A \cap B = B$

해설



$$
\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \\
&= (A-B)\cup(B-A) \\
&= B\cap A^c \\
&= B-A
\end{aligned}
$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A-B)\cup(B-A) = B-A$ 에서$(A-B)$와$(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A-B=\varnothing$가 되어야 한다. $A-B=\varnothing \leftrightarrow A\subset B$

23. $0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이고, 필요조건이 $b+3 \le x \le 3$ 이다. a 의 최솟값을 m, b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m+M$ 의 값을 구하여라.

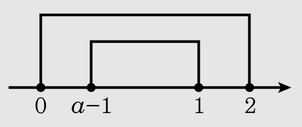
▶ 답 :

▷ 정답 : $m+M=-2$

해설

$0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이므로

$\{x \mid a-1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid 0 \le x \le 2\}$



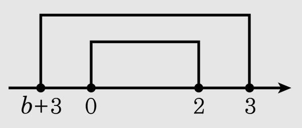
위의 그림에서 $0 \le a-1 \le 1$

$\therefore\ 1 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

또, $0 \le x \le 2$ 이기 위한 필요조건이

$b+3 \le x \le 3$ 이므로

$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset \{x \mid b+3 \le x \le 3\}$



위의 그림에서 $b+3 \le 0$

$\therefore\ b \le -3 \cdots$ ㉡

㉠에서 a의 최솟값 $m=1$,

㉡에서 b의 최댓값 $M=-3$

$\therefore\ m+M=1+(-3)=-2$

24. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \cdots\cdots$ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \cdots\cdots$ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

25. 다음은 $x > 0$일 때, $x + \frac{1}{x} \geq 2$임을 증명한 것이다.

> $x > 0$이면 (가) > 0 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
> $\frac{1}{2}$(나) $\geq$ (다)이므로 $\frac{1}{2}$(나) ≥ 1이다. 즉, 등호가 성립하는 것은
> $x =$ (가)$(x > 0)$ 일 때 이므로 $\therefore x = 1$

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① $x,\ \frac{1}{x},\ x + \frac{1}{x}$
② $x,\ \frac{1}{x},\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$
③ $x,\ x + \frac{1}{x},\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$
④ $\frac{1}{x},\ x + \frac{1}{x},\ \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$
⑤ $\frac{1}{x},\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right),\ \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$

해설

산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$

26. 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서

$x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)$, $f(0)=2f(0)$

$\therefore$ $f(0)=0$

27. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고
$f(-1) = -a+b,\ f(4) = 4a+b$ 이므로
치역은 $\{y \mid -a+b \leq y \leq 4a+b\}$ 이다.
그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로
$-a+b = -5,\ 4a+b = 10$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 3,\ b = -2$
$\therefore 2a+b = 4$

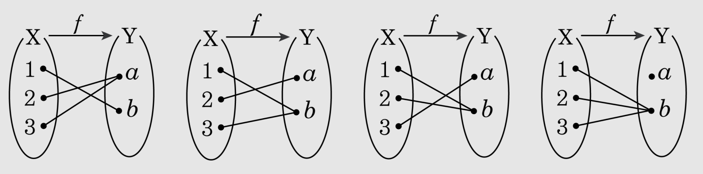
28. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



29. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x의 값은?

① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$h(x) = f(1 - x) = 1 - \frac{1}{1 - x}$

$1 - \frac{1}{1 - x} = \frac{99}{100}$, $1 - x = 100$, $x = -99$

30. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

31. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right)=3x+2$를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f\left(\frac{x+4}{2}\right)=3x+2$ 에서

$\frac{x+4}{2}=2$ 이면 $x=0$ 이므로

$f(2)=3\cdot 0+2=2$

32. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$	㉡ $y = \lvert x - 2 \rvert$
㉢ $y = x^2 - 2$	㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y =\mid x - 2 \mid$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

33. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1$, $xy - x = 2y+1$, $xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$\therefore\ y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$= \dfrac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

34. 두 함수 $f(x)=2x,\ g(x)=3x-1$에 대하여 $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$를 구하면?

① $-\frac{1}{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$ 이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)-1=3(2x)-1$

$\qquad\qquad=6x-1$ 이므로

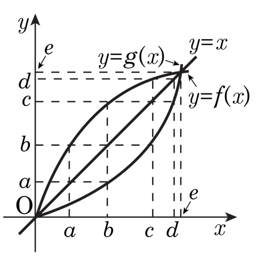
$y=(g\circ f)(x)$ 라 하면 $y=6x-1$ 이고 일대일 대응이다.

그러므로 역함수를 구하면

$\therefore\ y^{-1}=(g\circ f)^{-1}(x)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g^{-1})(1)=(g\circ f)^{-1}(1)=\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

35. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x), y=g(x), y=x$ 의 그래프이다. 이 때, $(f\circ g\circ f)(b)$ 의 값을 구하면? (단, 모든 점선은 x 축, 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

해설

$f(b)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는
$y=x$ 의 $f(b)=x$ 값이고
이때 $x=c$, $g(c)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는
$y=x$ 의 $g(c)=x$ 값이고
이때 $x=b$, $f(b)=c$ 이므로
$\therefore$ c

해설

그림에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로
$(f\circ g\circ f)(b)=f(b)=c$

36. 자연수를 원소로 가지는 집합 S 가 조건 '$x \in S$ 이면 $(4-x) \in S$ 이다.'를 만족한다. 이 때, 집합 S 의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

집합 S 의 원소는 자연수이어야 하므로 x가 자연수이어야 한다. 또한, 조건 '$x \in S$ 이면 $(4-x) \in S$'로부터 x가 S 의 원소이면 $(4-x)$도 S 의 원소이므로 $(4-x)$도 자연수이다.$1 \in S$ 이면 $(4-1) \in S$, 즉 $3 \in S$, $2 \in S$ 이면 $(4-2) \in S$, 즉 $2 \in S$, $3 \in S$ 이면 $(4-3) \in S$, 즉 $1 \in S$ 이므로 1과 3은 동시에 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아니어야 한다.
한편, 2는 혼자서 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아닐 수 있다.
따라서 두 집합 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$의 원소들을 동시에 갖거나 갖지 않는 모든 집합들을 보면S_1 만을 가질 때에는 $\{2\}$,S_2 만을 가질 때에는 $\{1, 3\}$,S_1, S_2를 모두 가질 때에는 $\{1, 2, 3\}$이다.
따라서 3개이다.

37. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 <u>않은</u> 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다. 원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다. 원소는 10 미만의 자연수이다.

① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\}$　　② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\}$　　④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$

38. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 120

해설

‘적어도~ ’문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$
$\therefore 128 - 8 = 120$

39. 집합 $A = \{x \mid x$는 27 의 약수$\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$\{1\} \subset B \subset A,\ n(B) = 3$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$
집합 B 는 원소 1 을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합이므로
$\{1,\ 3,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 27\}$, $\{1,\ 9,\ 27\}$ 의 3 개이다.

40. 집합 $A=\{x \mid 1 \le x \le 2a\}$, $B=\{x \mid 1-a \le x < 8\}$에 대하여 $A \cap B = A$ 일 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

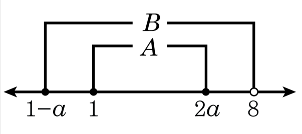
해설

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

$\therefore 1-a \le 1$ 그리고 $2a < 8$

$\Rightarrow 0 \le a < 4,\ a = 0, 1, 2, 3$

따라서 정수 a의 개수는 4개이다.



41. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 2\times a-5,\ 5\}$, $B=\{0,\ b+3,\ 3\}$ 에 대하여 $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{0,\ 3\}$ 이기 위한 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$A\cap B=\{0,\ 3\}$ 이므로 $3\in A$,
$2\times a-5=3$, $a=4$
$A=\{-1,\ 0,\ 3,\ 5\}$, $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 이므로 $2\in B$,
$b+3=2,\ b=-1$
$\therefore a+b=3$

42. 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \cup \varnothing = \varnothing$

④ $A \subset B,\ B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \cup \varnothing = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

43. 다음은 명제 'xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)' 가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

> 주어진 명제의 대우는 'x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.' 이다. 이것이 참임을 보이자.
> x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1$, $y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
> 이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
> $= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
> $= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
> 또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
> $= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
> $= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
> 이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
> $3mn \pm m \pm n$, $3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
> 따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
> 그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

① (가) 3의 배수　② (나) 3의 배수　③ (다) xy
④ (라) 참　⑤ (마) 거짓

해설
대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

44. 집합 $X = \{-1, 1\}$을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수
$f(x) = |x|, g(x) = ax - 2$에 대하여 $f(-1) = g(-1)$일 때, $a + g(1)$의 값은?

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$
$\therefore a = -3$
이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$
$\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

45. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10　② -5　③ 1　④ 5　⑤ 11

해설

$f(x) = x - 1$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$
$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x-2) = (x-2) - 1 = x - 3$
$\vdots$
$\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x) = x - 10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

46. $A=\{\varnothing,\ \{a\},\ b,\ \{c,d\},\ e\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{a\}\in A$　　② $\varnothing \in A$　　③ $\{c,\ d\}\subset A$

④ $n(A)=5$　　⑤ $\{b,\ e\}\subset A$

해설

③ $\{c,\ d\}\in A$

47. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답:** ______ 개

▷ **정답:** 12 개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합을 찾으려면,
5 는 반드시 포함되고 $1, 2, 3$ 중에 하나만 포함되어야 한다.
(1) 1 과 5 는 포함되고, $2, 3$ 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
(2) 2 와 5 는 포함되고, $1, 3$ 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
(3) 3 과 5 는 포함되고, $1, 2$ 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)

48. 중학생 120 명을 대상으로 수학, 과학, 영어 중 자신 있어 하는 과목을 선택하게 하였더니, 수학을 선택한 학생은 33 명, 과학을 선택한 학생은 40 명, 영어를 선택한 학생은 36 명이었다. 또, 두 과목을 선택한 학생은 모두 34 명, 세 과목을 모두 선택한 학생은 9 명이었다. 세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 63 명

해설

중학생 전체의 집합을 U , 수학을 선택한 학생의 집합을 A , 과학을 선택한 학생의 집합을 B , 영어를 선택한 학생의 집합을 C 라 하면,
두 과목을 선택한 학생 수는 $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3n(A\cap B\cap C)$,
세 과목을 모두 선택한 학생 수는 $n(A\cap B\cap C)$,
세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수는 $n((A\cup B\cup C)^c)$
,
$n(U)=120, n(A)=33, n(B)=40, n(C)=36, n(A\cap B\cap C)=9$
,
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3n(A\cap B\cap C)=34$ 이므로,
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=34+27=61$,
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+n(A\cap B\cap C)$
$=33+40+36-61+9=57$
$\therefore n((A\cup B\cup C)^c)=n(U)-n(A\cup B\cup C)=120-57=63$

49. 두 이차방정식 $x^2-ax+b=0$과 $x^2-bx+a=0$이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b의 값을 정할 때, $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β, $x^2-bx+a=0$의 근을 γ, σ라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
$\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$를 만족한다.
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$, $\gamma+\sigma=b$,
$\gamma\sigma=a(a, b>0)$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{9(\gamma+\delta)}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=6$$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}\geq 6$$

50. 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 두 등식을 만족할 때, c값의 범위는?

$$a+b+c=5,\ \ b^2+c^2=11-a^2$$

① $-\frac{1}{2}\le c\le\frac{1}{2}$　② $-3\le c\le\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}\le c\le 3$
④ $1\le c\le\frac{3}{2}$　⑤ $1\le c\le\frac{5}{2}$

해설

$a+b=5-c,\quad a^2+b^2=11-c^2$을
코시-슈바르츠 부등식
$(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a+b)^2$에 대입하면
$2(11-c^2)\ge(5-c)^2$
$3c^2-10c+3\le0,\ (3c-1)(c-3)\le0$
$\therefore\ \frac{1}{3}\le c\le3$