1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^4 = -1$

② $x^2 = -9$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-27} = 3\sqrt{3}i$

④ $2 \in \{x \mid x \text{는 복소수}\}$

⑤ $a + bi$ 에서 $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 순허수이다.(단, a, b 는 실수)

해설

$$i^2 = -1 \rightarrow i^4 = 1$$

2. $(3+i)(a+bi) = 1-3i$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 를 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(3+i)(a+bi) &= 1-3i \\ (3a-b) + (a+3b)i &= 1-3i \\ \therefore 3a-b &= 1, \quad a+3b = -3 \\ \Rightarrow a &= 0, \quad b = -1 \\ \therefore a+b &= -1\end{aligned}$$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i} + \frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-2i)(2-3i) + (1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\ &= \frac{(2-6) + (-4-3i) + (2-6) + (4+3)i}{2^2+3^2} \\ &= \frac{(-4-7i) + (-4+7i)}{13} \\ &= -\frac{8}{13} \end{aligned}$$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i \\y^2 &= (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i \\ \therefore x^2 + y^2 &= -2\end{aligned}$$

해설

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$$

5. 이차방정식 $(x-1)(x+3) = 7$ 의 해는?

- ① $\frac{-2 \pm \sqrt{11}}{2}$ ② $\frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$ ③ $-2 \pm \sqrt{11}$
④ $-1 \pm \sqrt{11}$ ⑤ $1 \pm \sqrt{11}$

해설

$$(x-1)(x+3) = 7, x^2 + 2x - 3 - 7 = 0, \\ x^2 + 2x - 10 = 0 \\ \text{근의 공식에 의해 } x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 10} = -1 \pm \sqrt{11}$$

6. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 - x - (k+7) = 0$ 의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k 는 상수)

- ① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x = 2$ 를 대입하면

$$k \cdot 2^2 - 2 - (k+7) = 0$$

$$4k - 2 - k - 7 = 0, 3k = 9,$$

$$\therefore k = 3$$

$$3x^2 - x - 10 = 0, (3x+5)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2, -\frac{5}{3}$$

7. 이차방정식 $x^2 - 3x - (k-1) = 0$ 이 실근을 갖게 하는 실수 k 의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 3x - (k-1) = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (k-1) \geq 0$$

$$9 + 4k - 4 \geq 0, 4k \geq -5$$

$$\therefore k \geq -\frac{5}{4}$$

8. 복소수 $\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i} &= \frac{(3+i)(1-i) + (1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{4-2i + (a+1) + (a-1)i}{2} \\ &= \frac{a+5 + (a-3)i}{2}\end{aligned}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore a=3$

9. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 한다.

$$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$$

$$= 2k - 2i - 2ki$$

$$= 2k - (2 + 2k)i$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

10. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

- ① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a+2)(2a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

11. $z = 1 - i$ 일 때, $\frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

- ① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{i}{1-i} - \frac{-i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

12. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2 - 2i$

② $2 \pm 3i$

③ $2 \pm \sqrt{3}i$

④ $3 \pm 2i$

⑤ $4 \pm 3i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 에서
 $(a + bi)(a - bi) = 13$, $(a + bi) + (a - bi) = 4$
 $a^2 + b^2 = 13$, $2a = 4$
 $\therefore a = 2, b = \pm 3$
 $z = 2 \pm 3i$

13. x 에 대한 이차방정식 $2mx^2 + (5m+2)x + 4m+1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}, -2$ ② $-\frac{7}{12}, -\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}, 2$
④ $-\frac{2}{7}, 2$ ⑤ $\frac{2}{7}, \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$D = (5m+2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (4m+1) = 0$$

$$25m^2 + 20m + 4 - 32m^2 - 8m = 0$$

$$7m^2 - 12m - 4 = 0$$

$$(7m+2)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{7} \text{ 또는 } 2$$

14. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0 \text{이}$$

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

15. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a-m-1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m + (-2a+b+1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1) = 0, \quad -2a+b+1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

16. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$ 가 x 에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
 $-k^2 + 4k - 3 = 0$
 $k^2 - 4k + 3 = 0$
 $(k-1)(k-3) = 0$ 에서
 $k = 1$ 또는 $k = 3$

17. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x-1)(x+3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

18. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의해} \\ &\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3 \\ &(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) \\ &= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta \\ &= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \\ &= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9 \end{aligned}$$

19. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① $x^2 + 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.
- ② $x^2 + 5 = 0$ 은 두 허근을 가진다.
- ③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$ 은 중근을 가진다.
- ④ $k \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다
- ⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$ 일 때만 중근을 가진다.

해설

- ① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$
- ② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$
- ③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m - 4) = 0$
- ⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0, a = 9$
- $\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2 - k) = k - 1 > 0 \therefore k > 1$

20. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$	㉡ $ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$
㉢ $cx^2 + bx + a = 0$	

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = b^2 - 4ac > 0 \dots$

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은

$$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$$

$$= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때

$x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만

$x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.

㉢ $cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

21. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

22. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

23. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켈레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
 ㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.
 ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
 ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉣
 ④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$
 $= (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di)$
 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

$\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= (a - bi)(c - di)$
 $= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

$\therefore$ 참

24. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉣
- ③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

- ㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
- ㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>
- ㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>