

1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = 15, n(B) = 37, n(U) = 60$ 을 만족할 때 $n(A^c \cap B)$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$$n(A^c \cap B) = n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 37 - 15 = 22$$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

3. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -x^2 + x$ 에 대하여 $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$ 의 합숫값을 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -47 ② -35 ③ 12 ④ 37 ⑤ 47

해설

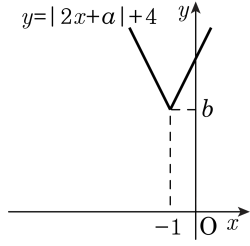
$$a = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = -5$$

$$b = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = -42$$

$$\therefore a - b = -5 - (-42) = 37$$

4. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10



해설

$$y = |2x + a| + 4$$

$$= \left| 2 \left(x + \frac{a}{2} \right) \right| + 4$$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는
 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향
 으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

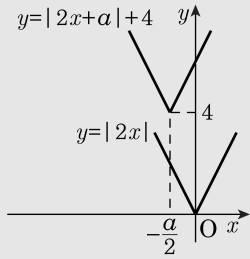
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -1, \quad b = 4$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 4 \quad \therefore ab = 8$$



5. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4} \end{aligned}$$

6. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
분다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

7. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x \\ 1-x &= 10 \\ \therefore x &= -9\end{aligned}$$

8. $p : |x - 1| \leq h$, $q : |x + 2| \leq 7$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다’가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \geq 0$)

- ① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $|x - 1| \leq h$ 에서 $-h \leq x - 1 \leq h$ 이므로
 $-h + 1 \leq x \leq h + 1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
 $|x + 2| \leq 7$ 에서 $-7 \leq x + 2 \leq 7$ 이므로
 $-9 \leq x \leq 5$
 $P \subset Q$ 이어야 하므로
 $-h + 1 \geq -9$ 에서
 $h \leq 10$
 $h + 1 \leq 5$ 에서 $h \leq 4$
따라서 $0 \leq h \leq 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

9. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

10. $a > 0, b > 0, a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때,
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로
 $a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}, 0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

11. A, B 두 마을의 인구의 비는 4 : 3, 남자의 비는 2 : 1, 여자의 비는 1 : 2 이고 A 마을의 총 인구가 6000 명일 때, A 마을의 여자의 수를 구하시오.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 1000 명

해설

A 마을의 남자는 x 명, 여자는 y 명이라 하면

B 마을의 남자는 $\frac{x}{2}$ 명, 여자는 $2y$ 명

6000 : (B 마을의 총 인구) = 4 : 3 에서

B 마을의 총 인구는 4500 명이다.

$x + y = 6000$, $x + 4y = 9000$ $\therefore y = 1000$ (명)

12. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

13. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore (3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 25$$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25이다.

14. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$
$$\therefore f(25) = 26$$

15. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x > 0) \\ -x^2+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은 $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

$$\text{모든 원소의 합은 } (-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$$

16. 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $n(\{0, 1, 2\}) - n(\{0, 1\}) = 1$
- ㉡ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{2, 3, 4\}) = 4$
- ㉢ $n(\{\neg, \perp, \sqsubset, \sqsupset\}) - n(\{\sqsubset, \vdash, \overline{}\}) = 6$
- ㉤ $n(\{x|x\text{는 } x < 1\text{인 홀수}\}) + n(\{\emptyset\}) = 1$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

해설

- ㉠ $n(\{0, 1, 2\}) - n(\{0, 1\}) = 3 - 2 = 1$
- ㉡ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{2, 3, 4\}) = 3 - 3 = 0$
- ㉢ $n(\{\neg, \perp, \sqsubset, \sqsupset\}) - n(\{\sqsubset, \vdash, \overline{}\}) = 4 - 3 = 1$
- ㉤ $n(\{x|x\text{는 } x < 1\text{인 홀수}\}) + n(\{\emptyset\}) = 0 + 1 = 1$

17. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
 q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
 r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
 $s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
 그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
 $\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

18. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2-y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1 \end{aligned}$$

19. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
 $f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

㉤ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉥ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

20. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = x|x|$, $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여, $(f^{-1} \circ g^{-1})(k) = -2$ 를 만족하는 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -9$

해설

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(k) &= -2 \text{ 이므로} \\ f^{-1}(g^{-1}(k)) &= -2 \text{ 에서 } g^{-1}(k) = f(-2) = -4 \\ \therefore k &= g(-4) = -9\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(k) &= -2 \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(k) = -2 \\ (g \circ f)(-2) &= k, \quad g(f(-2)) = g(-4) = -9 \\ \therefore k &= -9\end{aligned}$$