**1.** 다음에서 조건 $p$ 는 조건 $q$이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

| $p$ : $a, b$는 모두 짝수 $\quad q$ : $a+b$는 짝수 |
|---|

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a=2m,\ b=2n$ ($n,\ m$ 은 자연수) 이면,
$a+b=2m+2n=2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a=3,\ b=3$ 일 때 $a+b=6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 $q$의 충분조건이다.

**2.** 두 양수 $a$, $b$에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$a>0$, $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9 이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

**3.** 두 조건 $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P, Q$ 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$　　② $P \cup Q$　　③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$　　⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 $P$ 의 원소 중에서 $Q$ 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

**4.** 명제 '$x$ 가 4의 배수가 아니면 $x$ 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$

④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

**5.** $a, b$ 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$ , $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$ , $b \geq 0$ , $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

**6.** $a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\ge (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \le 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \ge 0,\ b \ge 0, c \ge 0$이므로

$0 \le \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \le 14$

따라서 최댓값은 14이다.

**7.** 다음 중 $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, $x, y$는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \leq 0$ $q : x = 0$

㉡ $p : x^2 + y^2 = 0$ $q : xy = 0$

㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ $x$ 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

**8.** 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, $x$, $y$ 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓

㉢ [반례] $x = 0,\ y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

**9.** 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 $x$, $y$에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠
$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$
$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠ ② ㉡

③ ㉢ ④ ㉣

⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.