1. 다음에서 조건 p 는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$p : a, b$는 모두 짝수 $\quad q : a+b$는 짝수

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a=2m,\ b=2n$ ($n,\ m$ 은 자연수) 이면,
$a+b=2m+2n=2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a=3,\ b=3$ 일 때 $a+b=6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 q의 충분조건이다.

2. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

3. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$ ⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

4. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$　　② $x = 12$　　③ $x = 10$

④ $x = 8$　　⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

5. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab) \ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

6. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

7. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \leq 0$ $q : x = 0$
㉡ $p : x^2 + y^2 = 0$ $q : xy = 0$
㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ x 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

8. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

ㄱ $x^2 \geq 0$

ㄴ $x^3 \geq 0$

ㄷ $|x| + |y| > 0$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

ㄴ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓

ㄷ [반례] $x = 0$, $y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

9. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

> $\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠
> $= \frac{4}{\sqrt{xy}}$
> $\therefore \quad \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
> $\therefore \quad x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
> 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. ……㉣

① ㉠　　② ㉡

③ ㉢　　④ ㉣

⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.