

1. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 에서 $4x+4yi = 8-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4x = 8, 4y = -2$$

$$\therefore x = 2, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore xy = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a \geq 0, b < 0$ ② $a > 0, b > 0$ ③ $a \geq 0, b > 0$
④ $a < 0, b < 0$ ⑤ $a \leq 0, b < 0$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

3. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $x^2 + 2x + 1 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $x^2 + 4x + 2 = 0$

- ① $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$

② $\textcircled{\tiny{\Delta}}$

③ $\textcircled{\tiny{\Xi}}$

④ $\textcircled{\tiny{\Gamma}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

⑤ $\textcircled{\tiny{\Delta}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

해설

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $(x + 1)^2 = 0$: 중근

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $a = 1, b' = 1, c = 4$
 $1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0$: 허근

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $a = 1, b' = 2, c = 2$
 $2^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0$: 서로 다른 두 실근 (○)

4. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은?

① -9

② -2

③ 0

④ 5

⑤ 13

해설

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 4 = 5$$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

- ① $-2 < x \leq -1, \frac{2}{3} < x < 1$ ② $-1 < x \leq -3, \frac{2}{3} \leq x < 2$
③ $-2 < x \leq 0, \frac{1}{3} < x < 1$ ④ $-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$
⑤ $-4 < x \leq -2, \frac{1}{3} < x < 1$

해설

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)^2 < 4 \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$ 이므로

$$x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq \frac{2}{3}$$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2,$

$-3 < x < 1$ 이므로

$$-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$$

6. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값과 그 때의 중근을 α 라 할 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x 의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (m-1)(m+2) = 0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$$x^2 - 4x + 4 = 0, (x-2)^2 = 0$$

$\therefore x=2$ (중근 α)

$$\therefore m + \alpha = 2 + 2 = 4$$

7. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, \quad -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

8. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$$

$$(k-3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

9. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x + 1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k + 3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

10. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

11. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \text{ 에서 } (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \text{정수해는 } x = 1$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x = y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x = 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x + y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

13. 부등식 $2|x+2|+|x-1|\leq 6$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때
 $2x+4+x-1-6=3x-3 \leq 0, x \leq 1$
 $\therefore x=1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때
 $2x+4+1-x-6=x-1 \leq 0$ 에서 $x \leq 1$
 $\therefore -2 \leq x < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
(iii) $x < -2$ 일 때
 $-2x-4-x+1-6=-3x-9 \leq 0$
 $3x \geq -9, x \geq -3$
 $\therefore -3 \leq x < -2 \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 에서 $-3 \leq x \leq 1$
따라서 만족하는 정수 x 의 개수는 5개

14. 부등식 $|2x - a| > 7$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > b$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x - a| > 7$ 에서

$2x - a < -7$ 또는 $2x - a > 7$

$\therefore x < \frac{a-7}{2}$ 또는 $x > \frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x < -1$ 또는 $x > b$ 이므로

$\frac{a-7}{2} = -1, \frac{a+7}{2} = b$

$\therefore a = 5, b = 6$

$\therefore a + b = 11$

15. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$ 또는 $a > 1$ ② $a < -2$ 또는 $a > 2$
③ $1 < a < -1$ ④ $-2 < a < 2$
⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 을 풀면 $x = \alpha, y = \beta$

또는 $x = \gamma, y = \delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x - y = -2$, 즉 $y = x + 2$

$\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1, -2$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = -2, y = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 6$$

17. x 에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
② $a < b$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
③ $a < 0$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
④ $b < 0$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 을 이항하여 정리하면
 $(a - b)x^2 - 2(a - b)x - 3(a - b) \geq 0$ (이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a < b$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a > b$ 이면
 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1$, $x \geq 3$

18. 이차부등식 $3x^2 - 2ax + a \geq 0$ 이 x 의 모든 실수 값에 대하여 성립할 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < x < 1$ ② $0 \leq a \leq 2$ ③ $0 \leq a \leq 3$
④ $1 < a < 3$ ⑤ $2 \leq a \leq 3$

해설

항상 성립하려면
판별식이 0보다 작거나 같아야한다.

$$D' = a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a - 3) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 3$$

19. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$

② $-\frac{1}{4} < a < 0$

③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$

④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$$2x - a = x^2 - 4ax + 1$$

$$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$$

$$D < 0 : (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$$

$$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{4} < a < 0$$

20. 이차방정식 $x^2 - (a+1)x - 3 = 0$ 의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > -3$

② $a > -1$

③ $a > 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < 3$

해설

$f(x) = x^2 - (a+1)x - 3$ 이라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 두근 사이에 3이 있으므로

$$f(3) = 9 - 3(a+1) - 3 < 0$$

$$-3a + 3 < 0$$

$$\therefore a > 1$$

21. x 에 관한 방정식 $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$ 에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m 의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

- ① ab ② $\frac{a+b}{a-b}$ ③ $\frac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$$\begin{aligned}(m+1)(x^2 - bx) &= (m-1)(ax - c) \\ mx^2 - bmx + x^2 - bx &= amx - cm - ax + c \\ (m+1)x^2 + (a-b-am-bm)x + cm - c &= 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라고 하면,} \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \therefore \frac{a-b-am-bm}{m+1} &= 0, \quad am + bm = a - b \\ m(a+b) &= a - b, \quad a \neq -b \text{이므로 } a+b \neq 0 \\ \therefore m &= \frac{a-b}{a+b}\end{aligned}$$

22. 모든 실수 x 에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$ 보다 위쪽에 있을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-6 < m < 2$ ② $-4 < m < 1$ ③ $-2 < m < 0$
④ $2 < m < 5$ ⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로
 $x^2 - (m + 2)x + 4 > 0$ 에서
이차방정식 $x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (m + 2)^2 - 16 < 0$
 $(m + 6)(m - 2) < 0$
 $\therefore -6 < m < 2$

23. 다음 연립방정식을 풀 때, $xyz = \pm \frac{n}{m}$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

$$x(x+y+z) = 12, \quad y(x+y+z) = 8, \quad z(x+y+z) = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 73

해설

$$x(x+y+z) = 12 \cdots \textcircled{A}$$

$$y(x+y+z) = 8 \cdots \textcircled{B}$$

$$z(x+y+z) = 16 \cdots \textcircled{C}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C} &= (x+y+z)^2 = 36 \\ &= x+y+z = \pm 6 \end{aligned}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에 대입하면

$$\therefore x = \pm 2, y = \pm \frac{4}{3}, z = \pm \frac{8}{3} \Rightarrow xyz = \pm \frac{64}{9}$$

$$\therefore m+n = 64+9 = 73$$

24. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 6y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
이 때, x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = (1-y)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
 $y^2 - 4y + 4 \leq 0, (y-2)^2 \leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2 = 0$
 $\therefore y = 2 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$

해설

주어진 식을 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$
 $x^2 + 2(1-y)x + (1-y)^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $\therefore (x+1-y)^2 + (y-2)^2 = 0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y = 0, y-2 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 2$
 $\therefore \frac{y}{x} = 2$