1. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

2. 명제 'p 이면 q 가 아니다.' 의 역인 명제의 대우를 구하면?

① q 가 아니면 p 이다.
② q 이면 p 가 아니다.
③ p 가 아니면 q 가 아니다.
④ p 가 아니면 q 이다.
⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \rightarrow \sim q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow \sim p \rightarrow q \Rightarrow p$가 아니면 q 이다.

3. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설
$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$
$\therefore 2a+b > a+2b$

4. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　　② $A < B < C$　　③ $A < C < B$

④ $B < A < C$　　⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

5. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b|>|a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$ ② $ab \ge 0$ ③ $a+b \ge 0$
④ $ab < 0$ ⑤ $a-b>0$

해설

$|a-b|>||a|-|b||$ 에 대하여
$(a-b)^2-(|a|-|b|)^2$
$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$
$=-2ab+2|a||b|>0$ 이려면
a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab<0$

6. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

7. $x>0,\ y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$
$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$
$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$
$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$
$\therefore(\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$
(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

8. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ② $\sqrt{2(a+b)} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ④ $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$
$= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$
(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

9. a, b, c 가 실수일 때, '$a^2+b^2+c^2=0$ 이다' 의 부정은?

① $a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $c=0$

② $abc \neq 0$

③ $a \neq b \neq c$

④ a, b, c 모두 0 이 아니다.

⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2+b^2+c^2=0 \leftrightarrow a=b=c=0$, $a=b=c=0$ 의 부정은 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

10. 다음 중 조건 '$x < 0$ 이고 $x^2 = 1$' 의 부정은?

① $x > 0$ 이고 $x^2 \neq 1$

② $x > 0$ 또는 $x^2 \neq 1$

③ $x \geq 0$ 이고 $x^2 \neq 1$

④ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)

⑤ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 또는 $x \neq -1$)

해설

'$x < 0$ 이고 $x^2 = 1$' 의 부정

$\Rightarrow x \geq 0$ 또는 $x^2 \neq 1$

$\Rightarrow x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)

11. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 50 이하의 양의 짝수$\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, 'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 6　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 28\}$
$R = \{4, 6\}$
'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

12. 네 조건 $p : x > 0,\ q : y > 0,\ r : x < 0,\ s : y < 0$을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R, S 라 할 때, 조건 $xy > 0$ 을 만족하는 집합은?

① $(P \cap Q) \cup (R^c \cap S^c)$

② $(P \cap Q) \cap (R \cap S)$

③ $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

④ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

⑤ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)^c$

해설

$p : x > 0,\ q : y > 0,\ r : x < 0,\ s : y < 0$ 일 때
$xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0)$ 또는 $(x < 0, y < 0)$
따라서, 주어진 조건을 만족하는 집합은
$(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

13. $p(x)$: $x > 0$, $q(x)$: $x < 1$ 일 때, '$p(x)$ 이고 $q(x)$ ' 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$
② $\{x \mid 0 < x < 1\}$
③ $\{x \mid x > 1\}$
④ $\{x \mid x < 0$ 또는 $x > 1\}$
⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x)$: $x > 0$, $q(x)$: $x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.
즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

14. 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=2$ 또는 $x=4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

15. 다음 명제 중 그 대우가 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 마름모이면 정사각형이다.

② $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

③ $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다

④ $ab = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.

⑤ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - 1 = 0$ 이다.

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이므로 참인 명제를 고르면 된다.

① (반례) □ABCD 에서 네 변의 길이가 같고 $\angle A = \angle C = 100°$, $\angle B = \angle D = 80°$ 일 때, □ABCD 는 마름모이지만 정사각형이 아니므로 거짓이다.

② (반례) $a = -3, b = 1$ 일 때, $a < b$ 이지만 $|a| > |b|$ 이므로 거짓이다.

④ (반례) $a = 0, b = 1$ 일 때, $ab = 0$ 이지만 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 거짓이다.

16. 다음 명제의 역, 이, 대우를 구하고, 각각의 참, 거짓을 판별한 것 중 옳은 것은?

$x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.

① 명제 : $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다. (참)

② 역 : $x = y$ 이면 $x^2 = y^2$ 이다. (거짓)

③ 이 : $x^2 \neq y^2$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)

④ 대우 : $x \neq y$ 이면 $x^2 \neq y^2$ 이다. (참)

⑤ 옳은 것이 없다.

해설

① 명제 : $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다. (거짓)
② 역 : $x = y$ 이면 $x^2 = y^2$ 이다. (참)
③ 이 : $x^2 \neq y^2$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
④ 대우 : $x \neq y$ 이면 $x^2 \neq y^2$ 이다. (거짓)

17. 다음 중 그 역이 거짓인 명제를 찾으면?

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.

② $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

해설

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B \neq A$ 이다. (참)
② $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. $\Rightarrow$ 반례 : $x = -3,\ \ y = 5$ (거짓)
③ x 가 3 의 배수가 아니면 x 는 9 의 배수가 아니다. (참)
④ $xz \neq yz$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
⑤ $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (참)

18. 다음 명제의 대우가 참인 명제는?

① x 가 3의 배수이면 x 는 9의 배수이다.

② $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.(x, y 는 실수)

③ 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$ 이다.

④ $x^2 = xy$ 면 $x = y$ 이다.(x, y 실수)

⑤ $|x - 1| = 2$ 이면 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 이다.(x 는 실수)

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.
① 반례 : 6, 12 등 (거짓)
② 반례 : $z = 0, x \neq y$ 인 모든 실수 (거짓)
③ 대우 : $a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다 (참)
④ 반례 : $x = 0, y \neq 0$ 인 실수 (거짓)
⑤ $|x - 1| = 2 \Rightarrow x = 3$ 또는 -1 , 이때의 x값은 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 해가 아니다.(거짓)

19. 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $\sim q \to \sim p$ ② $p \to r$ ③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim p$ ⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

① 명제 $p \to q$ 참이므로 대우인 $\sim q \to \sim p$도 참
②, ③ 명제 $\sim r \to \sim q$ 참이므로 대우인 ③ $q \to r$도 참이고,$p \to q$와 $q \to r$로부터 ② $p \to r$도 참이다.
④ $p \to r$이 참이므로 대우인$\sim r \to \sim p$ 도 참이다.
⑤ 명제$p \to r$이 참이라고 해도 이인$\sim p \to \sim r$은 반드시 참이라고는 할 수 없다.

20. 세 조건 p, q, r에 대한 다음 추론 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $p \to \sim q$ 이고 $r \to q$ 이면 $p \to \sim r$ 이다.

② $p \to \sim q$ 이고 $\sim r \to q$ 이면 $p \to r$ 이다.

③ $q \to \sim p$ 이고 $\sim q \to r$ 이면 $p \to r$ 이다.

④ $p \to q$ 이고 $\sim r \to \sim q$ 이면 $p \to r$ 이다.

⑤ $p \to q$ 이고 $q \to p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \to q$, $q \to p$이면 $p \leftrightarrow q$이다.

21. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p: xz = yz$, $q: x = y$

② p : 3 의 배수, q : 9 의 배수

③ $p: x = 1, y = 1$, $q: x + y = 2, xy = 1$

④ $p: |x - 1| = 2$, $q: x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p: a + b > 2$, $q: a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건
② 필요조건
③ 필요충분조건
④ 필요충분조건
⑤ [반례] $a = 2$, $b = -10$일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

22. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은? (단, a, b, c 는 실수)

① $p : ab = 0$, $q : a + b = 0$

② $p : ac = bc$, $q : a = b$

③ p : $\triangle$ABC 는 이등변삼각형, $q : \angle B = \angle C$

④ $p : a > -1$, $q : a > 2$

⑤ $p : a > 0, b < 0$, $q : a - b > 0$

해설

① 아무 조건이 아니다.
② $q \to p$ (p 는 q 이기 위한 필요조건)
③ $q \to p$ (p 는 q 이기 위한 필요조건)
④ $q \to p$ (p 는 q 이기 위한 필요조건)
⑤ $p \to q$ (p 는 q 이기 위한 충분조건)

23. 다음 보기의 $\boxed{}$안에 알맞은 것을 차례로 적으면?

보기

㉠ 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

① 충분, 필요　　② 필요, 충분

③ 필요, 필요　　④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

㉠ $A \cup C = B \cup C$ $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $A = B$ <반례> $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1,\ 2\}$

$\therefore$ 필요조건

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, $(x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $x = y = 0$

$\therefore$ 필요조건 [반례] $x = 1$, $y = 1$

24. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $p : ac = bc,\ q : a = b$

② $p : A \subset B,\ q : A - B = \varnothing$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0,\ q : ab < 0$

④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a,\ b$ 가 정수

⑤ p : △ABC 는 정삼각형이다. q : △ABC 의 세 내각의 크기가 같다.

해설

① $ac = bc$ $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $a = b$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$ $\overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $A - B = \varnothing$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$ $\overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ $ab < 0$ (반례 : $a = -2,\ b = 2$)
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a + b$ 가 정수 $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $a,\ b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$
)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

25. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$
$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$ ② $A \le B$ ③ $A > B$
④ $A \ge B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \ge 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \ge 0$이므로 $A \ge B$

26. $x > y > 0$인 실수 $x,\ y$에 대하여 $\dfrac{x}{1+x},\ \dfrac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$　② $\dfrac{x}{1+x} \le \dfrac{y}{1+y}$　③ $\dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$
④ $\dfrac{x}{1+x} \ge \dfrac{y}{1+y}$　⑤ $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y}$

해설

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y}$ 이라하면

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y} = \dfrac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$

$= \dfrac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$

따라서 $\therefore \dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

27. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \le |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

> (증명) $|a+b| \ge 0, |a|+|b| \ge 0$ 이므로
> $|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
> $= 2(|ab| - ab)$
> 그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \ge 0$
> $\therefore\ |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
> 따라서 $|a+b| \le |a|+|b|$
> 여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
> 즉, $ab \ge 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \ge ab, a = b$
② $|ab| \ge ab, |ab| = ab$
③ $|ab| \le ab, |ab| = ab$
④ $|ab| = ab, a = 0$
⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \ge ab$($\because$ $|ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$일 때, 즉 $|ab| = ab$

28. a, b가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a|+|b| \geqq |a+b|$　　㉡ $|a+b| \geqq |a-b|$

㉢ $|a-b| \geqq |a|-|b|$　　㉣ $|a+b| \geqq ||a|-|b||$

① ㉠　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a|\cdot|b|$

$|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because$ $|a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$||a|-|b||^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

29. 다음은 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

> $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
> $=\frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\}$
> $=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}$ ([가])0 이므로
> $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

① $<, x=y=z$　　② $\leq, x=y=z$
③ $\geq, x=y=z$　　④ $<, xy=yz=zx$
⑤ $\leq, xy=yz=zx$

해설

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
$=\frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\}$
$=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geq 0$ 이므로
$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

30. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. ∴ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ ∴ 거짓

㉢ [반례] $x = 0,\ y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ ∴ 거짓

31. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)

32. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(나)^2}{2}$이므로

부등식 $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$　　② $\geq,\ a-b,\ a=b=0$

③ $>,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$　　④ $>,\ a-b,\ a=b$

⑤ $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$

$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

(가) , (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a=b$일 때 성립한다.

33. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.
② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.
③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.
④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.
⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식
$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균
④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

34. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

> [(가)] - [(나)]
> $= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
> $= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
> $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)]
> 따라서, [(가)] ≥ [(나)]
> 한편, 등호는 [(라)]일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$
② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$
③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$
$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$
$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$
$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
한편, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

35. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$ ② $R < Q < P$ ③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$ ⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

36. $a > b > c > 0$일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < C < A$

④ $B < A < C$　　⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$에서

$b-a<0,\ b-c>0,\ a-c>0$이므로

$A = \frac{c}{b-a} < 0,\ B = \frac{a}{b-c} > 0$

$C = \frac{b}{a-c} > 0$

$$\begin{aligned} B-C &= \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c)-b(b-c)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b)-c(a-b)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore B > C$

따라서 $A < 0,\ B > C > 0$이므로

$B > C > A$이다.