

1. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x = a$, $y = b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

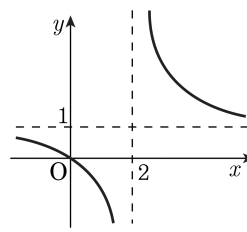
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x-1}$ 이므로,
점근선은 $y = 2$, $x = 1$ 이다.
 $\therefore a + b = 3$

2. 함수 $y = \frac{ax-b}{-2x+c}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?
(단, a, b, c 는 상수)

- ① 2 ② 1 ③ 0
④ 1 ⑤ -2



해설

$$\begin{aligned} \text{분수함수 } y &= \frac{ax-b}{-2x+c} \\ &= \frac{ax-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{ac}{2}-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} - \frac{a}{2} \text{의 점근선의} \end{aligned}$$

방정식은 $x = \frac{c}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$ 이므로

$$\frac{c}{2} = 2, \quad -\frac{a}{2} = 1$$

즉, $c = 4$, $a = -2$ 이므로 $y = \frac{-2x-b}{-2x+4}$

또한, 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{-b}{4} \therefore b = 0$$

$$\therefore a+b+c = 2$$

3. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3, n = 1$

$$m + n = 4$$

4. 함수 $y = \frac{2x-7}{x-2}$ 의 그래프와 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{2x-7}{x-2} = \frac{2(x-2)-3}{x-2} = -\frac{3}{x-2} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore k = -3$

5. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 의

최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다.

이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$$(x+2)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

$$y = \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)+4}{x-2}$$

$$= \frac{4}{x-2} + 1$$

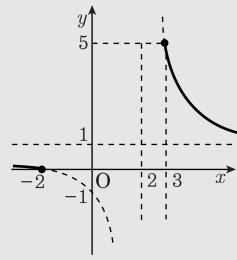
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \frac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과

같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.



6. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)
- ① $\{y \mid y < 0 \text{ 또는 } y > 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ④ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } 1 < y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나

므로

$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

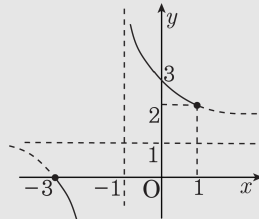
$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$$\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$$



7. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a, b 의 값에

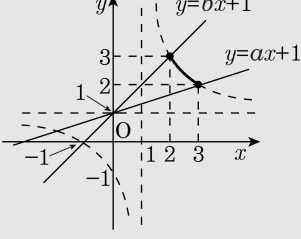
관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음

그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

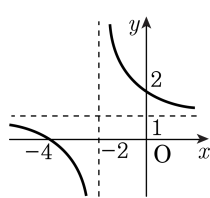
따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의

최솟값은 1 이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



8. 함수 $y = \frac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -4
 ④ -7 ⑤ 0



해설

점근선이 $x = -2$, $y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \dots\dots ①$$

①이 $(0, 2)$ 를 지나므로 대입하면 $k = 2$

$$y = \frac{2}{x+2} + 1 = \frac{-x-4}{-x-2}$$

$$\therefore a = -1, b = -2, c = -4$$

9. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{-\frac{10}{2}+3}{\frac{5}{2}-1} = -\frac{4}{3}$$
$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3}+3}{\frac{4}{3}-1} = 1$$
$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$
$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$
$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$
$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

10. 함수 $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $f(g(x)) = x$ 를 만족하는 $g(x) = \frac{bx+c}{x+a}$ 일 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x \text{에서} \\ \therefore g(x) &= f^{-1}(x) \\ y &= \frac{2x-1}{x+2} \text{로 놓으면} \\ y(x+2) &= 2x-1, yx+2y=2x-1 \\ yx-2x &= -1-2y, x(y-2) = -1-2y \\ x &= \frac{-1-2y}{y-2} \\ \therefore f^{-1}(x) &= \frac{-2x-1}{x-2} = g(x) \\ \frac{-2x-1}{x-2} &= \frac{bx+c}{x+a} \text{에서} \\ a &= -2, b = -2, c = -1 \\ \therefore a+b+c &= -2-2-1 = -5 \end{aligned}$$