1. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$　　㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$　　㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

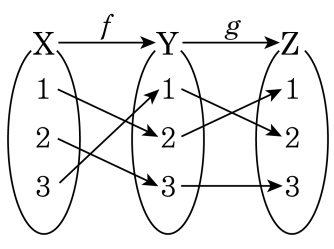
▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

2. 두 함수 f, g의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$
f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

3. 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=-2x+1$ 일 때, $(f\circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ② $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ③ $y=\frac{1}{2}x$
④ $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

해설

$(g^{-1})(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(f\circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x))\\ &= \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-2\\ &= -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. 함수 $f(x)=2x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{6}g(x)-\frac{1}{6}$ ③ $2g(x)-1$
④ $\frac{1}{3}g(x)$ ⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x)=2x+1$ 에서 $y=2x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x=\frac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{x-1}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x-1}{2}$

$f(3x)=6x+1$ 에서 $y=6x+1$ 이라 놓고

x 에 대하여정리하면 $x=\frac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{x-1}{6}$

$\therefore\ f^{-1}(3x)=g(3x)=\frac{x-1}{6}$

$\therefore\ g(3x)=\frac{1}{3}\times\frac{x-1}{2}=\frac{1}{3}\cdot g(x)$

5. 함수 $f(x) = 3x - 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $(g \circ g)(a) = 2$ 를 만족하는 상수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$(g \circ g)(a) = 2$ 에서

$(g^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ g)(a) = (g^{-1} \circ g^{-1})(2)$

$\therefore a = (g^{-1} \circ g^{-1})(2)$

$= (f \circ f)(2) = f(f(2))$

$= f(4) = 10$

6. 두 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}, g(x)=1-x$에 대하여 $g(x)=f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)$이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$y=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad x=1-\dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{1-x}=f^{-1}(x)$

$\therefore \quad f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)=10$

$\Rightarrow \quad g(x)=1-x=10 \quad x=-9$

7. 함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, 유리수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

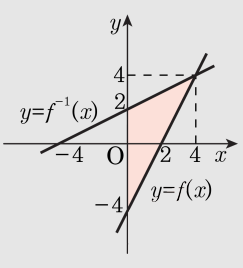
함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 $f(x) = x$ 의 해와 같으므로
$\frac{1}{6}x^2 + a = x$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서, $x^2 - 6x + 6a = 0$ 에서 a 가 유리수이므로 두 근은 $3 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ 이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $6a = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$
$\therefore a = \frac{7}{6}$

8. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4,\ 0)$,$(0,\ 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
$\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

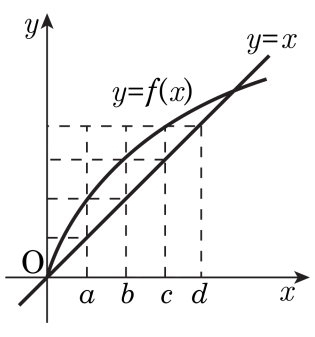
9. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?

① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) = d\end{aligned}$$

10. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b ② $b+d$ ③ $2b+c$

④ $b+c+d$ ⑤ $a+b+c$

해설

그림에서 $f(b)=c$, $f^{-1}(b)=a$ 이므로

$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$