

1. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

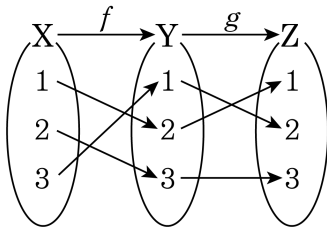
㉠ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉣ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

2. 두 함수 f, g 의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$$

f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

3. 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = -2x + 1$ 일 때, $(f \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

③ $y = \frac{1}{2}x$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

해설

$$(g^{-1})(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. 함수 $f(x) = 2x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{6}g(x) - \frac{1}{6}$

③ $2g(x) - 1$

④ $\frac{1}{3}g(x)$

⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x) = 2x + 1$ 에서 $y = 2x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x = \frac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{2}$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-1}{2}$$

$f(3x) = 6x + 1$ 에서 $y = 6x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x = \frac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{6}$

$$\therefore f^{-1}(3x) = g(3x) = \frac{x-1}{6}$$

$$\therefore g(3x) = \frac{1}{3} \times \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3} \cdot g(x)$$

5. 함수 $f(x) = 3x - 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $(g \circ g)(a) = 2$ 를 만족하는 상수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$(g \circ g)(a) = 2$ 에서

$$(g^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ g)(a) = (g^{-1} \circ g^{-1})(2)$$

$$\therefore a = (g^{-1} \circ g^{-1})(2)$$

$$= (f \circ f)(2) = f(f(2))$$

$$= f(4) = 10$$

6. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = 1-x$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$ 이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = 1-x = 10 \quad x = -9$$

7. 함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, 유리수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{7}{6}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{8}{3}$

해설

함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 $f(x) = x$ 의 해와 같으므로
 $\frac{1}{6}x^2 + a = x$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, $x^2 - 6x + 6a = 0$ 에서 a 가 유리수이므로 두 근은 $3 + \sqrt{2}$
, $3 - \sqrt{2}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $6a = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$

$$\therefore a = \frac{7}{6}$$

8. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는

두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.

그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

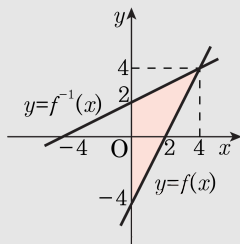
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.

함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$

$$\therefore x = 4$$

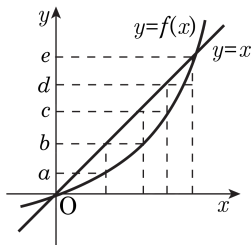


따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로

그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

9. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?

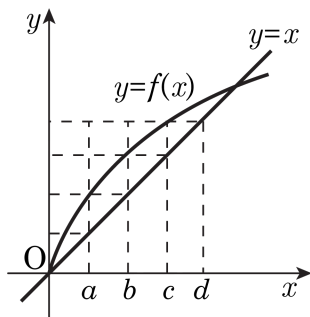
- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

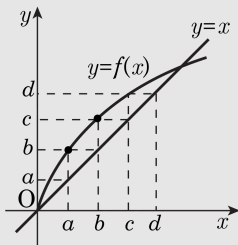
$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) = d\end{aligned}$$

10. $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b + f(b) + f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



- ① b ② $b + d$ ③ $2b + c$
 ④ $b + c + d$ ⑤ $a + b + c$

해설



그림에서 $f(b) = c$, $f^{-1}(b) = a$ 이므로
 $b + f(b) + f^{-1}(b) = b + c + a$