

1. 함수 $f(x) = ax + b(a > 0)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ 일 때 $f(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = 4x + 3$$

x 에 대한 항등식 이므로 $a^2 = 4, ab + b = 3$

$a > 0$ 이므로 $a = 2, b = 1$

$$\therefore f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore f(1) = 3$$

2. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1 \quad (\because f(2) = 3)$$

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

3. $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x \text{ 일 때}$$

$$\frac{2x}{-x+2} = 2 \text{ 에서 } 2x = 2(-x+2), 2x = -2x+4$$

$$\therefore x = 1$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f\left(\frac{2}{-1+2}\right) = 1 - 3$$

$$\therefore f(2) = -2$$

4. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$$

$$(f \circ g)(1) = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

5. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

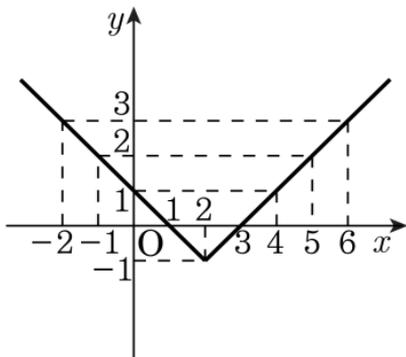
해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면

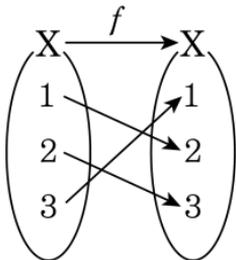
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$

$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$

$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$

따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

7. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

① -2

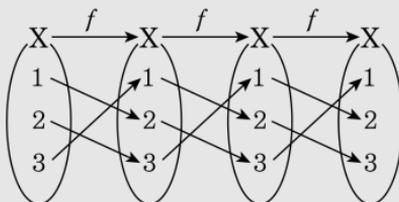
② 2

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

같은 방법으로 $f^3(2) = 2$, $f^3(3) = 3$ 이다.

$\therefore f^3(x) = x$ 이므로

$$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x),$$

$$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$$

$$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2, f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$$

8. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

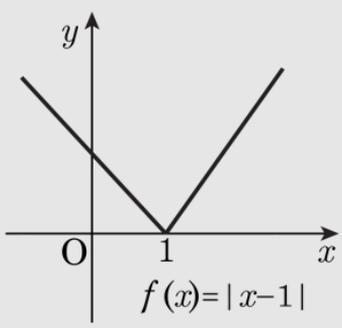
$$\therefore f^{2005} \left(-\frac{1}{2} \right) = f^{2004} \left(f \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = f \left(-\frac{1}{2} \right) = 3$$

9. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

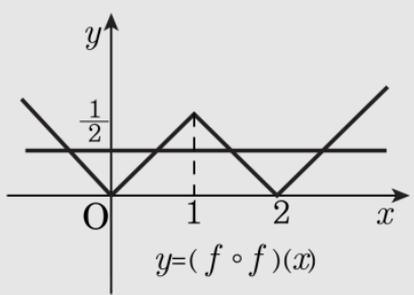
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



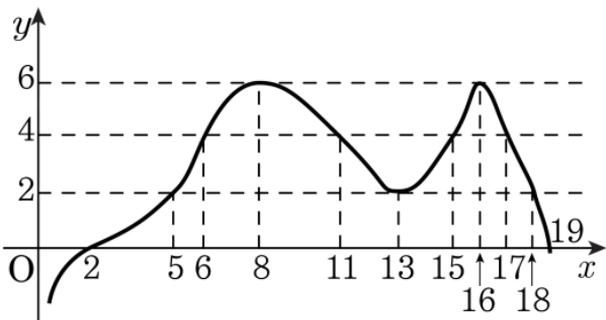
$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

$y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

10. 아래 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. x 에 관한 방정식 $f(f(x+2)) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x < 2$ 또는 $x > 19$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 2, 20 ② 2, 22 ③ 3, 30 ④ 4, 42 ⑤ 4, 50

해설

$f(f(x+2)) = 4$ 에서 $f(x+2) = a$ 로 놓으면

$f(a) = 4$, $y = f(x)$ 와 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표가 a 값 이므로
 $a = 6, 11, 15, 17$

그런데 $f(x+2) \leq 6$ 이므로 $a \leq 6$

$\therefore a = 6$

$f(x+2) = 6$, $x+2 = 8, 16$

$\therefore x = 6, 14$

$\therefore x$ 값은 2개. 합은 $6 + 14 = 20$