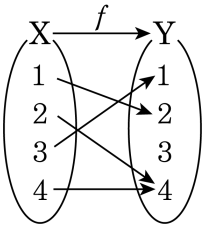
1. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다.
㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
㉤ 일대일대응이다.

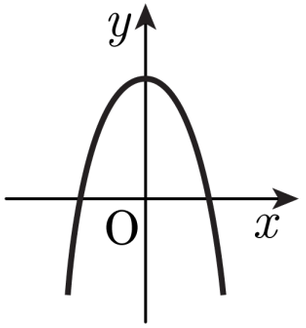


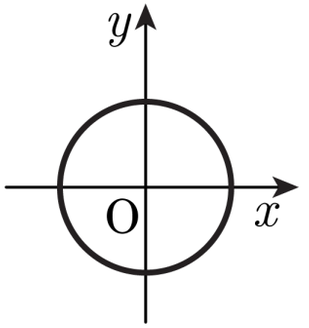
① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

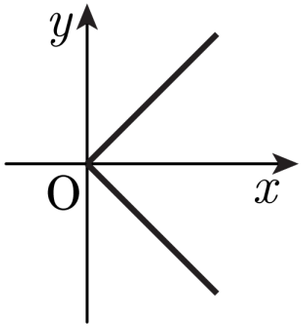
해설

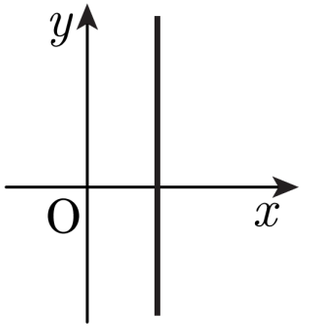
㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가
1 개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $Y \neq f(x)$ 이므로
일대일대응이 아니다.

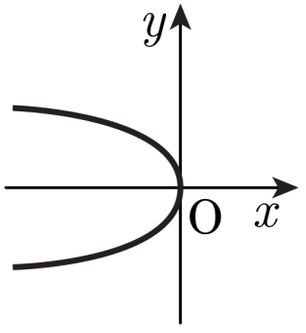
2. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\text{가 유리수})\\ 2x & (x\text{가 무리수})\end{cases}$$ 일 때,

$f(x)-f(x-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(i) x가 유리수일 때, $x-1$도 유리수이므로

$f(x)-f(x-1)=2x-1-\{2(x-1)-1\}$

$=2x-1-(2x-3)=2$

(ii) x가 무리수일 때, $x-1$도 무리수이므로

$f(x)-f(x-1)=2x-2(x-1)=2$

따라서 (i),(ii)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(x-1)=2$

4. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$가 성립할 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 121

해설

$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$
$f(1) = 1$, $f(2) = 3^2$, $f(3) = 5^2$,
$f(4) = 7^2$, $f(5) = 9^2$, $f(6) = 11^2 = 121$

5. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$이고 $f(1)=1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

임의의 실수 $x,\ y$에 대하여
$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$가 성립하므로,
$x=1,\ y=0$을 대입하면
$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$\therefore\ \ f(0)=f(1)+f(1)=2$

6. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1, 5\}$

7. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$ 일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

8. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore$ $x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$-a + b = 3$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$

$\therefore$ $a + b = 1$

9. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

① $f : x \to 2|x|$ ② $f : x \to x^3$ ③ $f : x \to x^5$

④ $f : x \to x$ ⑤ $f : x \to x|x|$

해설

①$f(-1) = 2,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2$ 이므로 항등함수가 아니다.
①, ②, ③, ④$f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 이므로 모두 항등함수이다.

10. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x) \geq x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$

$\Rightarrow x \leq 0,\ x \geq 5$

$x \geq k$ 이므로 $k = 5$