1. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기] 의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

㉠ $p \to r$	㉡ $\sim q \to \sim r$
㉢ $r \to q$	㉣ $\sim r \to q$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \to q\ (T) \ \leftrightarrow \ \sim q \to \sim p\ (T) \cdots$ ㉠

$r \to p\ (T) \ \leftrightarrow \ \sim p \to \sim r\ (T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sim q \ \to \ \sim r\ (T) \ \leftrightarrow \ r \to q\ (T)$

2. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 $p,\ q$ 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore p$는 q이기 위한 충분조건이다.

3. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta| = |\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α, β 는 실수)

① $\alpha\beta < 1$　　② $\alpha\beta = -1$　　③ $\alpha\beta = 0$

④ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$　　⑤ $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

$|\alpha-\beta| = |\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta = 0$

0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha\beta < 1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta < 1$ 는 $\alpha\beta = 0$ 의 필요조건이다.

4. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y는 실수이다.)

> ㉠ p : $-1 < x < 1$ q : $x < 3$
>
> ㉡ p : $|x-1| = 2$ q : $x^2 - 2x + 3 = 0$
>
> ㉢ p : $x^2 + y^2 = 0$ q : $xy = 0$
>
> ㉣ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$
>
> ㉤ $p : |x| = 1$ $q : x = 1$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉡ p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
㉢ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉣ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
즉, $A^c \cup B = U$와 $A \subset B$은 동치이다.
㉤ p는 q이기 위한 필요조건만 된다.
$\therefore$ 1개

5. 집합 A, B, C에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B)$, $q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A$, $q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A$, $q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A$, $q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B$, $q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \ \Leftarrow \ A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \ \subset (B \cap C)$
$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow \ A \subset (B \cup C)$
$A \subset (B \cap C) \ \Rightarrow \ A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \ \Leftrightarrow \ (B \cap C) \subset A$
$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow \ (B \cup C) \subset A$
$(B \cap C) \subset A \ \Leftarrow \ (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \ \Leftrightarrow \ B \subset A$
$B \subset A \ \Leftarrow \ B = \varnothing$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
$q : A \cup (B - A) = B \ \Leftrightarrow \ (A \cup B) = B$
$\Leftrightarrow \ A \subset B \ \therefore \ P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

6. 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 세 조건 $p,\ q,\ r$이 다음과 같다.

$p : (A-B) \cup (B-A) = \varnothing$
$q : A = B$
$r : A \cup B = B$

이 때, 조건 p는 조건 q이기 위한 ㉠조건이고, 조건 q는 조건 r이기 위한 ㉡조건이다. ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분
② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

해설

$(A-B) \cup (B-A)\ \varnothing \leftrightarrow A-B=\varnothing, B-A=\varnothing \leftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$
$\leftrightarrow A=B\ \therefore p \leftrightarrow q$ 이므로
㉠: 필요충분조건
$A \cup B\ B \leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A=B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)
$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 ㉡: 충분조건

7. 두 조건 $p : x \le 3-a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$ ② $a > 7$ ③ $a > 3$
④ $a > -1$ ⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \to \sim q$ 의 대우명제 $q \to \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3-a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3-a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

8. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$ ⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$ ② $P - Q = \varnothing$ ③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$ ⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

10. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이나 충분조건은 <u>아닌</u> 것을 고르면? (단, n 은 자연수, $x,\ y,\ z$ 는 실수)

① $p : A \cup B = A,\ q : B - A = \phi$

② $p : n^2$ 은 12 의 배수이다., $q : n$ 은 12 의 배수이다.

③ $p : xyz \neq 0,\ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

⑤ $p : |x + y + z| = |x| + |y| + |z|,\ q : xy + yz + zx > 0$

해설

① $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi$ $\therefore$ 필요충분조건

② $p : n^2$ 은 12의 배수이다. $\leftarrow q : n$ 은 12 의 배수이다.<반례> n 이 6 이면 n^2 은 12 의 배수이나 n 은 12 의 배수가 아니다. $\therefore$ 필요조건

③ $p : xyz \neq 0 \ \rightarrow \ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다. $\therefore$ 필요충분조건

④ $p : x^2+y^2+z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0,\ z = 0$ $q : x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} = 0 \Leftrightarrow\ x = y = z$

$p :\ x^2 + y^2 + z^2 = 0\ \Rightarrow q :\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

$\therefore$ 충분조건

⑤ $|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \Rightarrow xy + yz + zx\ 0$ <반례> $x = 3,\ y = 5,\ z = -1$ 을 대입하면 $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다.$\therefore$ 충분조건