1. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기]의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

㉠ $p \rightarrow r$　　㉡ $\sim q \rightarrow \sim r$

㉢ $r \rightarrow q$　　㉣ $\sim r \rightarrow q$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q\ (T) \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p\ (T) \cdots$ ㉠

$r \rightarrow p\ (T) \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim r\ (T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sim q \rightarrow \sim r\ (T) \leftrightarrow r \rightarrow q\ (T)$

2. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

3. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α,β 는 실수)

① $\alpha\beta<1$ ② $\alpha\beta=-1$ ③ $\alpha\beta=0$

④ $\alpha^2+\beta^2=0$ ⑤ $\alpha^2-\beta^2=0$

해설

$|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta=2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta=0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha\beta<1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta<1$ 는 $\alpha\beta=0$ 의 필요조건이다.

4. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y는 실수이다.)

ㄱ p : $-1 < x < 1$ q : $x < 3$

ㄴ p : $|x-1| = 2$ q : $x^2 - 2x + 3 = 0$

ㄷ p : $x^2 + y^2 = 0$ q : $xy = 0$

ㄹ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$

ㅁ $p : |x| = 1$ $q : x = 1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

ㄱ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
ㄴ p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
ㄷ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
ㄹ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
즉, $A^c \cup B = U$와 $A \subset B$은 동치이다.
ㅁ p는 q이기 위한 필요조건만 된다.
$\therefore$ 1개

5. 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B),\ q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A,\ q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A,\ q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A,\ q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B,\ q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$
$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$
$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$
$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$
$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
$B \subset A \Leftarrow B = \varnothing$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$
$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

6. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 세 조건 p, q, r이 다음과 같다.

$p : (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$
$q : A = B$
$r : A \cup B = B$

이 때, 조건 p는 조건 q이기 위한 ㉠조건이고, 조건 q는 조건 r이기 위한 ㉡조건이다. ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분
② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

해설

$(A - B) \cup (B - A)$ $\varnothing \leftrightarrow A - B = \varnothing, B - A = \varnothing \leftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$
$\leftrightarrow A = B$ $\therefore p \leftrightarrow q$ 이므로
㉠: 필요충분조건
$A \cup B$ $B \leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A = B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)
$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 ㉡: 충분조건

7. 두 조건 $p : x \le 3 - a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$ ② $a > 7$ ③ $a > 3$

④ $a > -1$ ⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$p \rightarrow \sim q$ 의 대우명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$Q \subset P^c$ 이므로

$P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,

$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로

$3 - a < -7$, $a > 7$

따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

8. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　② $Q \subset P$　③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.

즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$ ② $P - Q = \varnothing$ ③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$ ⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

10. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이나 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, n 은 자연수, $x,\ y,\ z$ 는 실수)

① $p : A \cup B = A,\ q : B - A = \phi$

② $p : n^2$ 은 12 의 배수이다., $q : n$ 은 12 의 배수이다.

③ $p : xyz \neq 0,\ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

⑤ $p : |x + y + z| = |x| + |y| + |z|,\ q : xy + yz + zx > 0$

해설

① $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi \therefore$ 필요충분조건

② $p : n^2$ 은 12의 배수이다. $\leftarrow q : n$ 은 12 의 배수이다.<반례> n 이 6 이면 n^2 은 12 의 배수이나 n 은 12 의 배수가 아니다. $\therefore$ 필요조건

③ $p : xyz \neq 0 \ \rightarrow \ q : x,\ y,\ z$ 는 모두 0 이 아니다. $\therefore$ 필요충분조건

④ $p : x^2+y^2+z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, z = 0\ q : x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

$p : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ $\therefore$ 충분조건

⑤ $|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \Rightarrow xy + yz + zx\ 0$ <반례> $x = 3,\ y = 5,\ z = -1$ 을 대입하면 $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다.$\therefore$ 충분조건