1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B가 서로소일 때, $(A-B)^c \cap A$를 간단히 한 것이다. ① ~ ⑤에 알맞지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{aligned}(A-B)^c \cap A &= (\quad ① \quad)^c \cap A \\ &= (\quad ② \quad) \cap A \\ &= (\quad ③ \quad) \cup (B \cap A) \\ &= (\quad ④ \quad) \cup (B \cap A) \\ &= (\quad ⑤ \quad)\end{aligned}$$

① $A \cap B^c$　　② $A \cup B^c$　　③ $A^c \cap A$
④ $\varnothing$　　⑤ $A \cap B$

해설

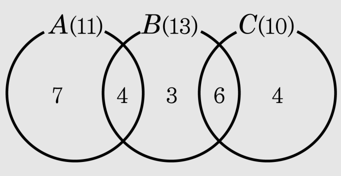
$$\begin{aligned}(A-B)^c \cap A &= (A \cap B^c)^c \cap A & \cdots ① \\ &= (A^c \cup B) \cap A & \cdots ② \\ &= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) & \cdots ③ \\ &= \varnothing \cup (B \cap A) & \cdots ④ \\ &= A \cap B & \cdots ⑤\end{aligned}$$

2. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11$, $n(B) = 13$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 17$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12　② 17　③ 24　④ 30　⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 24$

3. 다음 중에서 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에대하여 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = B - A$이 성립하기 위한 A, B사이의 관계는 ?

① $A \subset B$ ② $A = B$ ③ $B \subset A$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A \cup B = \varnothing$

해설

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
$= B - A$
$\therefore A - B = \varnothing \rightarrow A \subset B$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$$
$$= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \text{ 이므로}$$

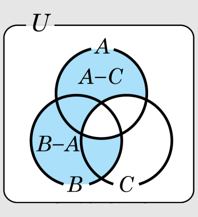
$$(A \star B) \star A$$
$$= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c]$$
$$\cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}]$$
$$= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A]$$
$$\cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}]$$
$$= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}]$$
$$\cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)]$$
$$= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)]$$
$$= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B$$

5. 전체집합 $U = \{x \mid x \le 100$인 자연수$\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x \mid x$는 4의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$, $C = \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ 에 대하여 $n((A^c \cap B) \cup (A - C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설



$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$(B - A) \cap (A - C) = \varnothing$

$\therefore n((A^c \cap B) \cup (A - C)) = n(A^c \cap B) + n(A - C)$

$n(A^c \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$

$= 20 - 5 = 15$

$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 25 - 8 = 17$

$\therefore 15 + 17 = 32$

6. 두 집합 $A = \left\{ \left[\frac{9}{5}k\right] \,\middle|\, k\text{는 } 1 \le k \le a\text{인 정수} \right\}$ $B = \left\{ \left[\frac{9}{4}k\right] \,\middle|\, k\text{는 } 1 \le k \le b\text{인 정수} \right\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$인 정수 $a,\ b$의 최솟값의 합은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때,
각각의 $\left[\frac{9}{5}k\right]$ 와 $\left[\frac{9}{4}k\right]$ 의 값을 알아보면,

$\left[\frac{9}{5}k\right]$: 1, 3, 5, 7, 9, 10 $\cdots$

$\left[\frac{9}{4}k\right]$: 2, 4, 6, 9, 11, $\cdots$

$A \cap B \neq \varnothing$ 이 되려면 $a \ge 5,\ b \ge 4$
$a,\ b$ 의 최솟값의 합은 9

7. 집합 $A_n = \left\{x | n \le x < 6n+5,\ n\text{은 자연수}\right\}$ 에 대하여 $S(n) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 이라고 정의한다. $n(S(n)) \ge 1$ 을 만족하는 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{x | 1 \le x < 11\}$,
$A_2 = \{x | 2 \le x < 17\}$,
$A_3 = \{x | 3 \le x < 23\}$,
$\vdots$
$A_{10} = \{x | 10 \le x < 65\}$,
$A_{11} = \{x | 11 \le x < 71\}$,
따라서 $n \ge 11$ 이 되면 $n(S(n)) = 0$ 이 되므로 n 의 최댓값은 10

8. 집합 $S = \{x \mid x < 100, x\text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때 A^c 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

(가) $4 \in A,\ 5 \in A$ (나) $p \in A,\ q \in A$ 이면 $p + q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$4, 5$ 는 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해 보면
$4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \cdots, 99$ 이다.
따라서 $A^c = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ 이고,
A^c 에서 가장 큰 원소는 11 이다.

9. 집합 $A = \left\{x | x\text{는 20보다 작은 2의 배수}\right\}$, $B = \left\{x | x\text{는 20보다 작은 4의 배수}\right\}$ 가 있다.
이 때, $X - A = \varnothing$, $X \cap B = \varnothing$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 32 개

해설

$A = \left\{x | x\text{는 20보다 작은 2의 배수}\right\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
$B = \left\{x | x\text{는 20보다 작은 4의 배수}\right\} = \{4, 8, 12, 16\}$
$X - A = \varnothing \Rightarrow X \subset A$, $X \cap B = \varnothing \rightarrow$ 집합 X 는 원소 $4, 8, 12, 16$ 을 반드시 포함하지 않는다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-4} = 32$ (개)

10. 두 집합 P, Q 에 대하여 $(P-Q) \cup (Q-P)$ 의 가장 작은 원소가 P 의 원소이면 $P < Q$, Q 의 원소이면 $P > Q$ 라고 정의한다. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,3,4,5\}$, $C = \{2,4,6,8\}$ 에 대하여 $A < B$, $B < C$ 를 만족하기 위한 자연수 a 를 모두 구하여라. (단, $n(B) = 4$ 이다.)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

해설

1) $a = 1$ 일 때
$(A-B) \cup (B-A) = \{2,5\}$ 이므로 $A < B$,
$(B-C) \cup (C-B) = \{1,2,3,5,6,8\}$ 이므로 $B < C$

2) $a = 2$ 일 때
$(A-B) \cup (B-A) = \{1,5\}$ 이므로 $A < B$,
$(B-C) \cup (C-B) = \{3,5,6,8\}$ 이므로 $B < C$

3) $a \geq 6$ 일 경우
$(A-B) \cup (B-A) = \{1,2,5,a\}$ 이므로 a 의 값에 관계없이 $A < B$, $(B-C) \cup (C-B) = \{2,3,5,6,a,8\}$ 또는 $\{2,3,5,6\}$ 또는 $\{2,3,5,8\}$ 이므로 a 의 값에 관계없이 $B < C$

따라서 a 는 1 또는 2 이다.