

1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 서로소일 때, $(A-B)^c \cap A$ 를 간단히 한 것이다. ① ~ ⑤ 에 알맞지 않은 것은?

$$\begin{aligned}
 (A - B)^c \cap A &= (\text{①})^c \cap A \\
 &= (\text{②}) \cap A \\
 &= (\text{③}) \cup (B \cap A) \\
 &= (\text{④}) \cup (B \cap A) \\
 &= (\text{⑤})
 \end{aligned}$$

① $A \cap B^c$

② $A \cup B^c$

③ $A^c \cap A$

④ \emptyset

⑤ $A \cap B$

해설

$$(A - B)^c \cap A = (A \cap B^c)^c \cap A \quad \dots \text{①}$$

$$= (A^c \cup B) \cap A \quad \dots \text{②}$$

$$= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \quad \dots \text{③}$$

$$= \emptyset \cup (B \cap A) \quad \dots \text{④}$$

$$= A \cap B \quad \dots \text{⑤}$$

2. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 4, n(B \cup C) = 17, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12

② 17

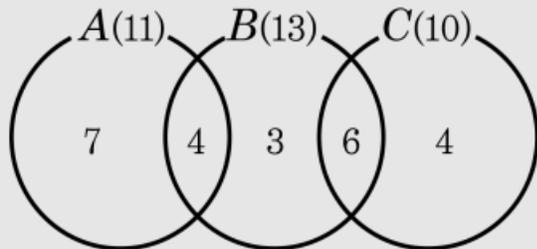
③ 24

④ 30

⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$$

3. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = B - A$ 이 성립하기 위한 A, B 사이의 관계는 ?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $B \subset A$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \\ = B - A$$

$$\therefore A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 \star 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A

② B

③ $A \cap B$

④ $A \cup B$

⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned} A \star B &= (A - B^c) \cup (B^c - A) \\ &= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$(A \star B) \star A$$

$$\begin{aligned} &= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c] \\ &\quad \cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A] \\ &\quad \cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}] \\ &\quad \cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)] \end{aligned}$$

$$= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)]$$

$$= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\}$$

$$= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\}$$

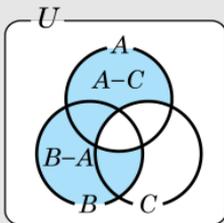
$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B$$

5. 전체 집합 $U = \{x \mid x \leq 100 \text{인 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n((A^c \cap B) \cup (A - C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설



$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$$(B - A) \cap (A - C) = \emptyset$$

$$\therefore n((A^c \cap B) \cup (A - C)) = n(A^c \cap B) + n(A - C)$$

$$n(A^c \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$$

$$= 20 - 5 = 15$$

$$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 25 - 8 = 17$$

$$\therefore 15 + 17 = 32$$

6. 두 집합 $A = \left\{ \left[\frac{9}{5}k \right] \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq a \text{인 정수} \right\}$ $B = \left\{ \left[\frac{9}{4}k \right] \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq b \text{인 정수} \right\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 인 정수 a, b 의 최솟값의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$k = 1, 2, 3, \dots$ 일 때,

각각의 $\left[\frac{9}{5}k \right]$ 와 $\left[\frac{9}{4}k \right]$ 의 값을 알아보면,

$\left[\frac{9}{5}k \right] : 1, 3, 5, 7, 9, 10 \dots$

$\left[\frac{9}{4}k \right] : 2, 4, 6, 9, 11, \dots$

$A \cap B \neq \emptyset$ 이 되려면 $a \geq 5, b \geq 4$

a, b 의 최솟값의 합은 9

7. 집합 $A_n = \{x | n \leq x < 6n + 5, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 $S(n) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 이라고 정의한다. $n(S(n)) \geq 1$ 을 만족하는 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 10

해설

$$A_1 = \{x | 1 \leq x < 11\},$$

$$A_2 = \{x | 2 \leq x < 17\},$$

$$A_3 = \{x | 3 \leq x < 23\},$$

⋮

$$A_{10} = \{x | 10 \leq x < 65\},$$

$$A_{11} = \{x | 11 \leq x < 71\},$$

따라서 $n \geq 11$ 이 되면 $n(S(n)) = 0$ 이 되므로 n 의 최댓값은 10

8. 집합 $S = \{x \mid x < 100, x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때 A^c 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

(가) $4 \in A, 5 \in A$

(나) $p \in A, q \in A$ 이면 $p + q \in A$

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

4, 5는 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해 보면
4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, \dots , 99이다.
따라서 $A^c = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ 이고,
 A^c 에서 가장 큰 원소는 11이다.

9. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$ 가 있다.

이 때, $X - A = \emptyset$, $X \cap B = \emptyset$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 32 개

해설

$$A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16\}$$

$X - A = \emptyset \Rightarrow X \subset A$, $X \cap B = \emptyset \rightarrow$ 집합 X 는 원소 4, 8, 12, 16 을 반드시 포함하지 않는다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-4} = 32$ (개)

10. 두 집합 P, Q 에 대하여 $(P - Q) \cup (Q - P)$ 의 가장 작은 원소가 P 의 원소이면 $P < Q$, Q 의 원소이면 $P > Q$ 라고 정의한다. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ 에 대하여 $A < B$, $B < C$ 를 만족하기 위한 자연수 a 를 모두 구하여라. (단, $n(B) = 4$ 이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

1) $a = 1$ 일 때

$$(A - B) \cup (B - A) = \{2, 5\} \text{ 이므로 } A < B,$$

$$(B - C) \cup (C - B) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B < C$$

2) $a = 2$ 일 때

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \text{ 이므로 } A < B,$$

$$(B - C) \cup (C - B) = \{3, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B < C$$

3) $a \geq 6$ 일 경우

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5, a\} \text{ 이므로 } a \text{ 의 값에 관계없이}$$

$$A < B, (B - C) \cup (C - B) = \{2, 3, 5, 6, a, 8\} \text{ 또는 } \{2, 3, 5, 6\}$$

$$\text{또는 } \{2, 3, 5, 8\} \text{ 이므로 } a \text{ 의 값에 관계없이 } B < C$$

따라서 a 는 1 또는 2 이다.