1. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 <u>모두</u> 고른 것은 무엇인가?

보기

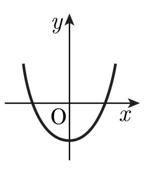
㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

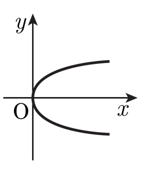
① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉣, ㉤

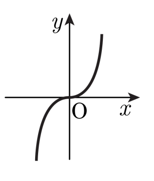
해설

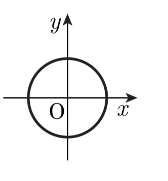
㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의
넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
$b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근),
$b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로
(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로
함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고
그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은
$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히
많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

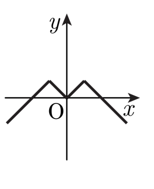
2. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

3. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

4. f : X $\to$ Y, $x \to f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$
② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$
④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의
「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

5. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3(x$ 는 실수$)$ 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

6. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

$a \rightarrow \boxed{}$, $b \rightarrow \boxed{}$, $c \rightarrow \boxed{}$

Y의 원소 p, q, r, s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p, q, r, s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(개)

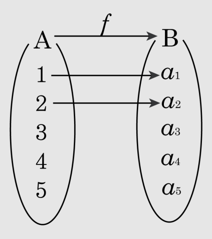
7. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개　　② 25 개　　③ 64 개

④ 81 개　　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

9. 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-3$일 때, 합성함수 $g\circ f$의 역함수 $(g\circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ② $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ③ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
④ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+1$

해설

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$$
$$=2(x+2)-3=2x+1$$

합성함수 $g\circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y=2x+1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x=\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$ 이 된다.
따라서, $(g\circ f)^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 이다.

10. 두 함수 f, g를 $f(x) = x-1$, $g(x) = 2x+4$로 정의할 때, $(f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f$
$= f \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot f$
$= g^{-1} \cdot f$
$\therefore\ (f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$
$= (g^{-1} \cdot f)(3)$
$= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2)$
이 때, $g^{-1}(2) = a$라 하면
$g(a) = 2$에서 $2a + 4 = 2$
$\therefore\ a = -1$

11. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$

즉 $2kx + k^2 - k = 0$

모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

12. $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 4x+1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$(g \circ h)(x) = 4(ax+b)+1 = 4ax+4b+1$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax+4b+1)+3 \\ &= -8ax-8b-2+3 \\ &= 4x+1\end{aligned}$$

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$

$h(x) = -\dfrac{1}{2}x$

$h(2) = -1$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$ 일 때, $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 2$와 $(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = 2$를 만족하는 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-2$

해설

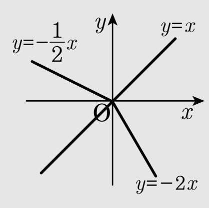
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$ 일 때,
$(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = (g \circ f)^{-1}(a) = 2$
$\rightarrow\ (g \circ f)(2) = a$
$\therefore\ a = g\{f(2)\} = g(-1) = -1$ ($\because\ f(2) = -1$)
$(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = (f \circ g)^{-1}(b) = 2$
$\rightarrow\ (f \circ g)(2) = b$
$\therefore\ b = f\{g(2)\} = f(2) = -1$ ($\because\ g(2) = 2$)
$\therefore\ a = -1,\ b = -1\ \rightarrow\ a+b = -2$

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x & (x \geq 0) \\ ax & (x<0)\end{cases}$ 가 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값은? (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

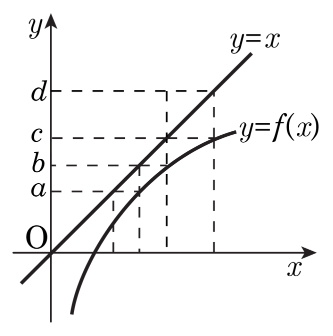
① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$f^{-1}(x)=f(x)$ 이려면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.
직선 $y=x$에 대하여 직선 $y=-2x$와 대칭인 직선의 방정식은 $x=-2y$
즉, $y=-\frac{1}{2}x$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.



15. 아래의 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b)=k$ 라 하면 $f(k)=b$
$f(c)=b$ 이므로 $k=c$
따라서 $f^{-1}(b)=c$

16. 점 $(6, -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

17. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

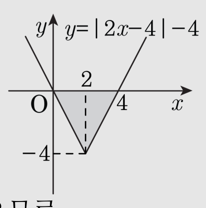
절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여



함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

18. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면 ?

보기

ㄱ $f(3) = 4$

ㄴ $0 \le f(n) \le 4$

ㄷ $f(n) = 2$인 자연수 n은 없다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한
일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서
$f(3) = 4 \quad \therefore$ 참
ㄴ. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는
$0, 1, 2, 3, 4$만이 올 수 있으므로
$0 \le f(n) \le 4 \quad \therefore$ 참
ㄷ. $f(n) = 2$ 이므로
$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$
$(p_i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.
즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.
그런데 정수 l에 대하여
ⅰ) $n = 5l$이면 $n^2 = 25l^2$
즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ⅱ) $n = 5l + 1$이면 $n^2 = (5l+1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
ⅲ) $n = 5l + 2$이면 $n^2 = (5l+2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅳ) $n = 5l + 3$이면 $n^2 = (5l+3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅴ) $n = 5l + 4$이면 $n^2 = (5l+4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n은 ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ), ⅴ)중
어느 한 꼴로 표현이 가능하므로
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
$\therefore$ 참

19. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

20. 실수 x를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

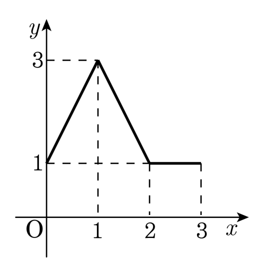
$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ 에서

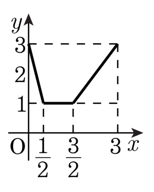
$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = -1,\ f_2(-1) = \frac{2}{3}$

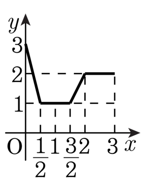
$f_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1,\ f_4(-1) = \frac{2}{3}\cdots$

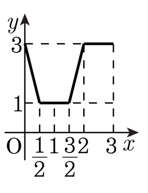
따라서 $f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

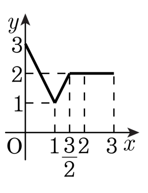
21. 함수
$y=f(x)\ (0 \le x \le 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(f\circ f)(x)\ (0 \le x \le 3)$ 의 그래프는 무엇인가?

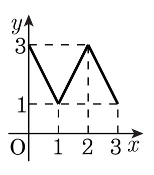


①


②


③


④


⑤


해설

$0 \le x \le 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프가
$x=1$ 에 대하여 대칭이므로
$y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프도
$0 \le x \le 2$ 에서 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.
$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))$ 에서
$f(f(0))=f(1)=3$
$f(f(1))=f(3)=1$
$f(f(2))=f(1)=3$
$f(f(3))=f(1)=3$
따라서, $y=(f\circ f)(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

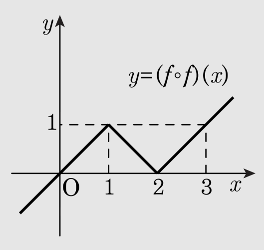
22. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \ne 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x - 1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x - 1| - 1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.



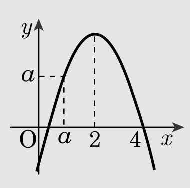
그런데, $b \ne 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1,\ b = 2$이므로 $ab = -2$

23. 집합 $X = \{x \mid x \leq a,\ x\text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a \qquad \therefore\ a = 0,\ 3$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

24. $g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x),\ g(x)$ 의 역함수)

① $\dfrac{2x-3}{x+2}$ ② $\dfrac{x-2}{2x+3}$ ③ $\dfrac{2x+3}{x-2}$

④ $\dfrac{x+2}{2x-3}$ ⑤ $\dfrac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\{f(x)\}$

$\therefore\ g\{f(x)\} = 2 + \dfrac{7}{f(x)-2} = x$

$\rightarrow\ \dfrac{7}{f(x)-2} = x - 2$

$\rightarrow\ 7 = \{f(x) - 2\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$

$\rightarrow\ 2x + 3 = f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x$ 에서

$f(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x, y 를 바꾸면

$x = 2 + \dfrac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2) = 7$

$y - 2 = \dfrac{7}{x-2}$, $y = \dfrac{7}{x-2} + 2 = \dfrac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

25. 임의의 양수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) $f(2) = -3$
(나) 임의의 두 양수 x, y 에 대하여
$f(xy) = f(x) + f(y)$

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(1 \times 2) = f(1) + f(2)$ 에서

$f(1) = 0$ $f(1) = f\left(\frac{1}{2} \times 2\right)$

$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = 3$

26. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ ② $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$
④ $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$ ⑤ $\dfrac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$\therefore f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

27. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=f(x-2)$ 이므로

$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$

$g^{-1}(9)=k$ 라 하면 $g(k)=9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2=9$ 에서 $k=5$

$k<2$ 일 때, $k-2=9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9)=5$