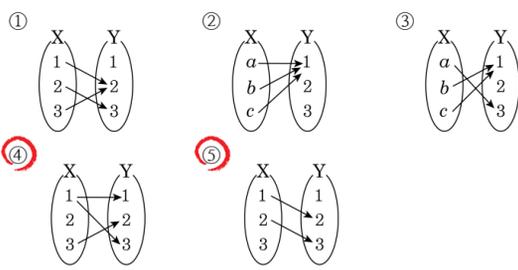


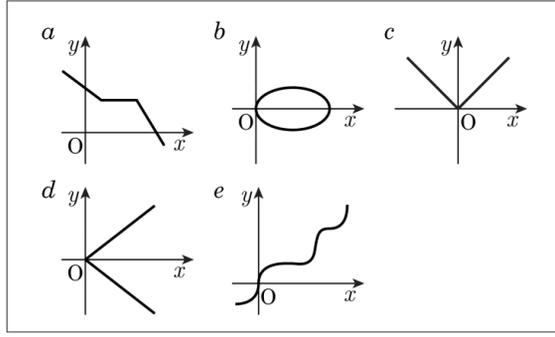
1. 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것을 모두 고르면?



해설

- ④ X 의 원소 1에 대응되는 Y 의 원소는 2개이고 X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
- ⑤ X 의 원소 3에 대응되는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

2. 다음 그래프 중 함수인 것은?

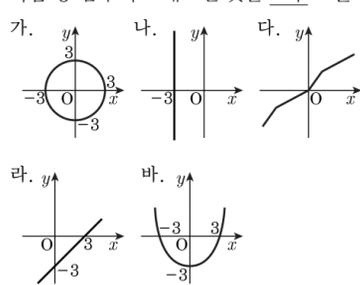


- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e]만이 함수이다.

3. 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 고른 것은?

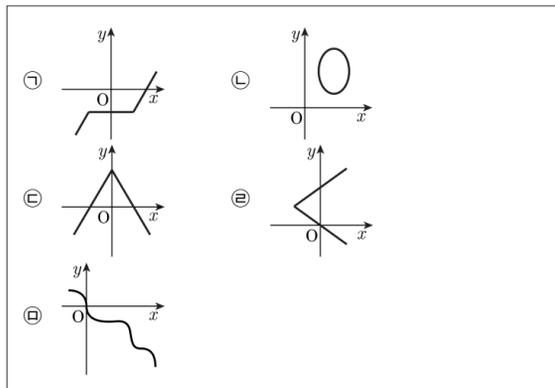


- ① 가, 나, 다 ② 가, 나, 마 ③ 다, 라, 마
 ④ 나, 마 ⑤ 가, 마

해설

주어진 x 에 y 값이 하나만 대응되어야 한다.
 \therefore 다, 라, 마가 함수이다.

4. 다음 그래프 중 함수인 것은?



- ① ㉠, ㉡, ㉢
 ② ㉠, ㉢, ㉤
 ③ ㉠, ㉢, ㉤
 ④ ㉡, ㉢, ㉤
 ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
 ㉡ 함수가 아니다.
 ㉢ 함수
 ㉣ 함수가 아니다.
 ㉤ 함수
 따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

5. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f 가 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2})$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{2}$ 와 $1-\sqrt{2}$ 는 모두 무리수이므로,
 $f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$
 $f(1-\sqrt{2}) = 1 - (1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
 $\therefore f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1$

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 X 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g(x) &= |x| \\ h(x) &= x^3, & k(x) &= \frac{|x+1| - |x-1|}{2} \end{aligned}$$

- ① f ② f, h ③ f, g, h
④ f, h, k ⑤ g, h, k

해설

$f: f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $g: g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.
 $h: h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $k: k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 f, h, k 이다.

7. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$f^{-1}(-7) = 2 \text{ 이므로}$$

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

8. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고
 $g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로
 $f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$

9. 두 함수 f, g 를 $f(x) = x-1, g(x) = 2x+4$ 로 정의할 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f \\ &= f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ f \\ &= g^{-1} \circ f \\ &\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) \\ &= (g^{-1} \circ f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) \\ &\text{이 때, } g^{-1}(2) = a \text{ 라 하면} \\ &g(a) = 2 \text{ 에서 } 2a + 4 = 2 \\ &\therefore a = -1 \end{aligned}$$

10. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 7$

▷ 정답: $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \text{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

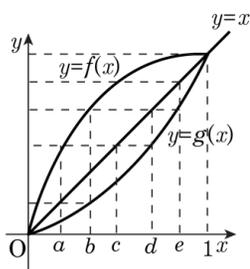
11. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로
역함수의 정의에 의해서
 $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$
 $2m + n = 3 \cdots \text{㉠}$
 $3m + n = 7 \cdots \text{㉡}$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$
 $\therefore m + n = -1$

12. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은 얼마인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$ 를 이용하여 함수값을 구한다.
 $f^{-1}(d) = x$ 라 하면,
 $f(x) = d \quad \therefore x = b$
 $\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
 $= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
 $= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

13. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나, 정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다. x, y 전체 실수 구간에서 그래프가 그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

14. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 1, g(x) = 4x + a \text{ 이므로} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x + 1) \\ &= 4(3x + 1) + a \\ &= 12x + 4 + a \end{aligned}$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$
 $\therefore a = 3$

15. 두 함수 $f(x) = -3x+k$, $g(x) = 2x+4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$f(x) = -3x+k, g(x) = 2x+4 \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x) = f(2x+4) = -3(2x+4) + k \\ = -6x - 12 + k \cdots \text{㉠}$$

$$(g \circ f)(x) = g(-3x+k) = 2(-3x+k) + 4 \\ = -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$$

$$\therefore k = -16$$

16. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

17. 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 3$ 을 만족할 때, $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = 2x^2 - 12x + 15$

② $g(x) = -2x^2 + 12x + 15$

③ $g(x) = 2x^2 - 14x + 15$

④ $g(x) = -4x^2 + 14x + 15$

⑤ $g(x) = 4x^2 - 14x + 15$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = x^2 - x + 3$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = t \text{ 라 하면 } x = -2t + 4$$

$$\therefore g(t) = (-2t + 4)^2 - (-2t + 4) + 3 = 4t^2 - 14t + 15$$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 14x + 15$$

18. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x)) = x$ 가 되는 함수 $g(x)$ 는?

- ① $1-x$ ② $\frac{1}{1-x}$ ③ $\frac{x}{x-1}$ ④ $\frac{x-1}{x}$ ⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ 일 때}$$

$g(f(x)) = x$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면

$$\frac{1}{1-x} = t \text{ 에서 } (1-x)t = 1, t - xt = 1$$

$$xt = t - 1, x = \frac{t-1}{t} \text{ 이므로 } g(t) = \frac{t-1}{t}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x}$$

19. $f(x^2 - 3x) = 4x^2 - 12x + 9$ 일 때, $f(-2)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

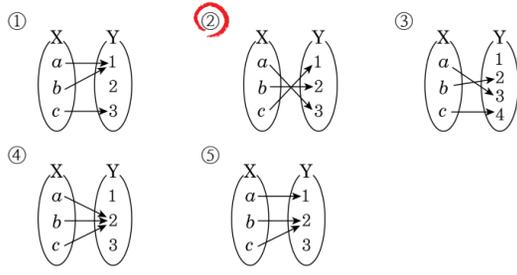
$$x^2 - 3x = -2 \text{ 에서 } x = 1, 2$$

$$\text{i) } x = 1 \text{ 일 때, } f(-2) = 4 - 12 + 9 = 1$$

$$\text{ii) } x = 2 \text{ 일 때, } f(-2) = 16 - 24 + 9 = 1$$

$$\text{i), ii) 에서 } f(-2) = 1$$

20. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?



해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

21. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

22. 집합 $A = \{1, a, b\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 3x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f(1) = g(1)$, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ 이어야 하므로
 $f(1) - g(1) = 0$, $f(a) - g(a) = 0$, $f(b) - g(b) = 0$ 이다.
따라서 $1, a, b$ 는 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근이다.

즉 $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 의 세 근의 합은

$$1 + a + b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = -\frac{2}{3}$$

23. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

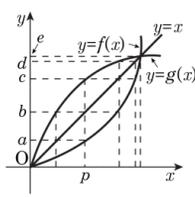
- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x-1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

24. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

- ① a ② b ③ c
 ④ d ⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

25. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

26. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$$h = g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서}$$

$$h \circ h = (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)$$

$$(h \circ h)(x) = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ = (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ = g^{-1}((f \circ f)(g(x)))$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$$

27. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

- ① $-3x + 17$ ② $-3x - 13$ ③ $-3x + 13$
④ $-3x$ ⑤ $-5x + 10$

해설

$$\begin{aligned}(k \circ f)(x) &= g(x) \\ (k \circ f \circ f^{-1})(x) &= (g \circ f^{-1})(x) \\ k(x) &= (g \circ f^{-1})(x) \\ f(x) &= 2x - 5 \\ \therefore y &= 2x - 5 \\ \frac{y+5}{2} &= x, \quad x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2} \\ \therefore y &= \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ \therefore f^{-1}(x) &= \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ \therefore (g \circ f^{-1})(x) &= -6\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) + 2 = -3x - 13\end{aligned}$$

28. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 8$

해설

$$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f \text{ 에서}$$

$$g = f \circ f \cdots \textcircled{1}$$

$$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore 5a - 10 = 30$$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

29. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

- ① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} &= I \text{ 이므로} \\ (g \circ f)^{-1} \circ h &= g \text{ 에서 } h = (g \circ f) \circ g \\ ((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3) \\ &= g(f(x - 3)) \\ &= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5) \\ &= (2x - 5) - 3 = 2x - 8 \\ 2x - 8 &= ax + b \text{ 에서 } a = 2, b = -8 \\ \therefore a + b &= -6\end{aligned}$$

30. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

31. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를 $f(x) =$

$$\begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$
 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) +$
 $\dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?
 (단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ...)

- ① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ f^2\left(\frac{1}{3}\right) &= f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \\ f^3\left(\frac{1}{3}\right) &= f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ &\vdots \\ \therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \left\{f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \\ &\quad + \left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \\ &= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25 \end{aligned}$$

32. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$f^{-1}(3x-1) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ 이므로}$$

$$3x-1 = 11 \text{ 에서 } x = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{-1}(11) &= \frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}} \\ &= -3 \end{aligned}$$

33. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면
 $f^{-1} \circ f = f \circ f$
이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$
즉 $(f \circ f)(x) = x$
 $\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$
 $\qquad \qquad \qquad = a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$
따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

34. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$

$x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$