

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

2. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$

$= 4(3x + 1) + a$

$= 12x + 4 + a$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$\therefore a = 3$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

4. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

5. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

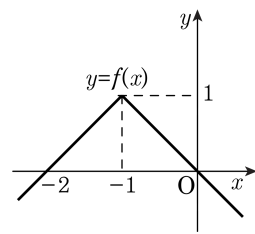
⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



- ① $y = |x - 1| - 1$
 ② $y = |x + 1| - 1$
 ③ $y = |x - 1| + 1$
 ④ $y = -|x + 1| + 1$
 ⑤ $y = -|x + 1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼,
 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = -|x|$ 에 x 대신 $x + 1$,
 y 대신 $y - 1$ 을 대입하면 $y - 1 = -|x + 1|$
 즉, $f(x) = -|x + 1| + 1$ 이므로 $y = -|x + 1| + 1$

7. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$$h(x) = f(1 - x) = 1 - \frac{1}{1 - x}$$
$$1 - \frac{1}{1 - x} = \frac{99}{100}, 1 - x = 100, x = -99$$

8. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

9. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5
- ② 3
- ③ 1
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

10. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 이고 $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$, $\dots$, $f_n = f_{n-1} \circ f$ 라고 정의할 때, $f_{2000}(-1)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

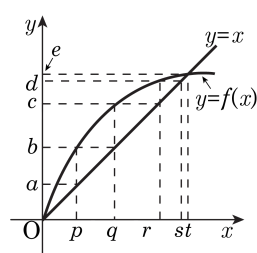
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ f_2(x) &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\ &= 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} \\ f_3(x) &= (f_2 \circ f)(x) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{x} - 1} = x \quad \text{즉 } f_3 = I \text{ (항등함수)} \end{aligned}$$

이므로

$$f_{2000}(-1) = f_{3 \times 666 + 2}(-1) = f_2(-1) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

11. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

- ① p ② q ③ r
 ④ s ⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

12. 함수 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2|x - 1| - 2$$

$$(i) \ x < 1 \text{ 일 때, } y = -2(x - 1) - 2 = -2x$$

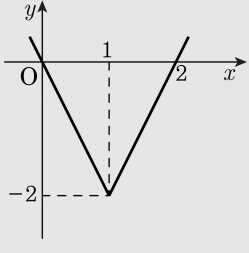
$$(ii) \ x \geq 1 \text{ 일 때, } y = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4$$

따라서 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와

x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

다음 그림에서

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

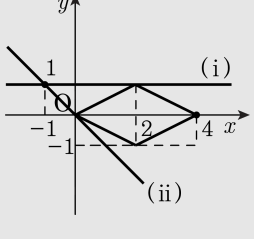


13. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.
 이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을
 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.
 직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
 (i) $m \leq 0$
 (ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
 (i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
 따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.



14. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

15. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $\frac{80}{399}$ ② $\frac{82}{399}$ ③ $\frac{83}{399}$ ④ $\frac{85}{399}$ ⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{3x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{4x+1} \end{aligned}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x} \\ &= \frac{x}{nx+1} \end{aligned}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$

16. 함수 $y = |x - 1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < m < 0$ ② $-\frac{1}{2} < m < 1$ ③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$
 ④ $0 < m < 1$ ⑤ $1 < m < 2$

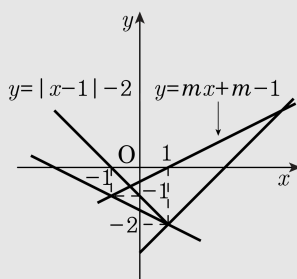
해설

$y = |x - 1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1, -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



17. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
 ④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
 $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여
 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$
 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
 반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

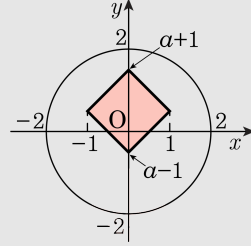
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$

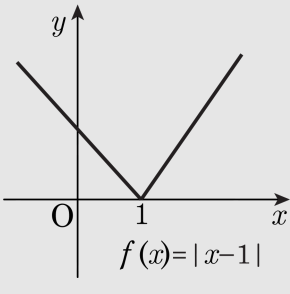


18. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

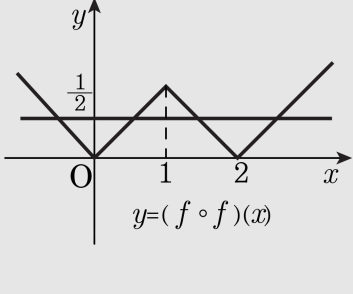
- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

19. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다

음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$

