1. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$ 의 합성함수 $g\circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y=-6x-1$　② $y=-6x$　③ $y=-6x+1$

④ $y=-6x+3$　⑤ $y=-6x+5$

해설

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=-3(2x+1)+2=-6x-1$ 이다.

2. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g\circ f)(x)=12x+7$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=3x+1,\ g(x)=4x+a$ 이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x+1)\\ &= 4(3x+1)+a\\ &= 12x+4+a\end{aligned}$$

따라서 $12x+4+a=12x+7$ 에서 $4+a=7$

$\therefore\ a=3$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h\circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4 = 16\end{aligned}$$

4. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

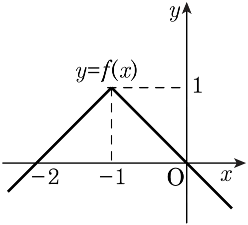
5. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x-1|-1$

② $y = |x+1|-1$

③ $y = |x-1|+1$

④ $y = -|x+1|+1$

⑤ $y = -|x+1|-1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 x 대신 $x+1$,
y 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1|+1$ 이므로 $y = -|x+1|+1$

7. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x의 값은?

① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$h(x) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x}$

$1 - \frac{1}{1-x} = \frac{99}{100}$, $1 - x = 100$, $x = -99$

8. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$ 에서

$\frac{x+4}{2} = 2$ 이면 $x = 0$ 이므로

$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$

9. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax + 3a + b = -4x - 5,$
$2a = -4,\ \ 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
$h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

10. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 이고 $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$, $\cdots f_n = f_{n-1} \circ f$ 라고 정의할 때, $f_{2000}(-1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$$f_2(x) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}$$

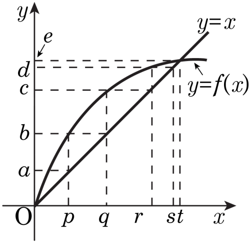
$$= 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

$f_3(x) = (f_2 \circ f)(x) = \dfrac{-1}{1 - \frac{1}{x} - 1} = x$ 즉 $f_3 = I$ (항등함수)

이므로

$$f_{2000}(-1) = f_{3\times666+2}(-1) = f_2(-1) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

11. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

㉠에서 $f(x) = r$

$\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$

$\therefore x = q$

12. 함수 $y=2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

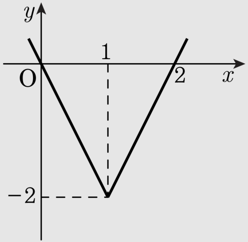
$y=2|x-1|-2$

(i) $x<1$ 일 때, $y=-2(x-1)-2=-2x$

(ii) $x\geq 1$ 일 때, $y=2(x-1)-2=2x-4$

따라서 $y=2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서

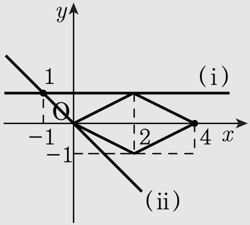
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$



13. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x\ge 0$, $y\ge 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m\le 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m\ge -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1\le m\le 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

14. 두 함수 $f(x)=-3x+k$, $g(x)=2x+4$에 대하여, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$f(x)=-3x+k,\ \ g(x)=2x+4$에서

$$(f\circ g)(x)=f(2x+4)=-3(2x+4)+k$$
$$=-6x-12+k\cdots ㉠$$
$$(g\circ f)(x)=g(-3x+k)=2(-3x+k)+4$$
$$=-6x+2k+4\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x-12+k=-6x+2k+4$

$\therefore k=-16$

15. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\dfrac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

① $\dfrac{80}{399}$ ② $\dfrac{82}{399}$ ③ $\dfrac{83}{399}$ ④ $\dfrac{85}{399}$ ⑤ $\dfrac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \dfrac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1}+1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore\ f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9\cdot 2+1} + \frac{2}{10\cdot 2+1} = \frac{80}{399}$$

16. 함수 $y=|x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1<m<0$ ② $-\frac{1}{2}<m<1$ ③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$

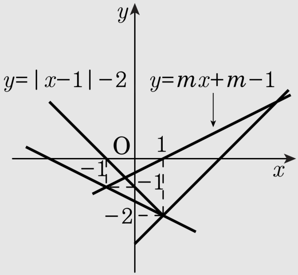
④ $0<m<1$ ⑤ $1<m<2$

해설

$y=|x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y=mx+m-1$ 은 $y=m(x+1)-1$ 에서 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2}<m<1$

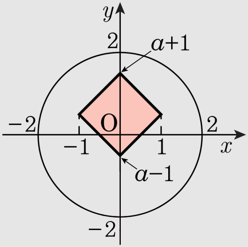


17. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q :| x | + | y - a |\le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$ ⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



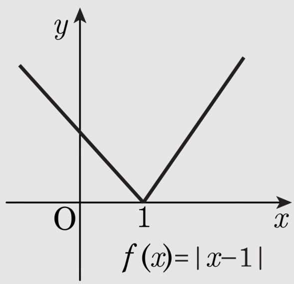
두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q :| x | + | y - a |\le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$
이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$| x | + | y - a |= 1$ 의 그래프는
$| x | + | y |= 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid | x | + | y - a | \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

18. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x의 합을 구하면?

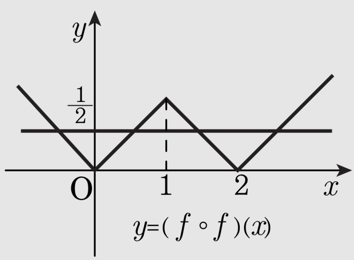
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프와

$y=\frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

19. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

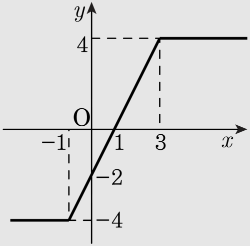
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$