

1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \emptyset$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \phi$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

3. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $P \subset Q$
- ② $P^c \subset Q$
- ③ $Q \subset P^c$
- ④ $P \cup Q^c = U$
- ⑤ $P^c \cap Q^c = \emptyset$

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로
 $P \subset Q^c$
 $\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$
 $\Leftrightarrow Q \subset P^c$

4. 명제 ‘ $a = 1$ 이면 $a^2 = a$ 이다.’에 대하여 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고르면?
- ① 역 ② 이 ③ 대우
④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

$a^2 - a = a(a - 1) = 0, a = 0, 1$
역: ‘ $a^2 = a$ 이면 $a = 1$ 이다.’ → 거짓
이: ‘ $a \neq 1$ 이면 $a^2 \neq a$ 이다.’ → 거짓
대우: ‘ $a^2 \neq a$ 이면 $a \neq 1$ 이다.’ → 참

5. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

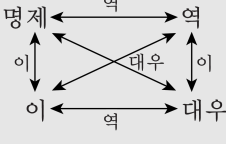
주어진 명제가 참이므로 대우「 $q \rightarrow \sim p$ 」도 참이다.

6. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

- ① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.
- ② 어떤 명제의 역과 이는 서로 대우 관계이다.
- ③ 어떤 명제의 역, 이, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.
- ④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.
- ⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이다.아래 그림처럼 ‘역’의 대우가 ‘이’이다.



7. 명제 ‘이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.’의 대우는?
- ① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.
 - ② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.
 - ③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.
 - ④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.
 - ⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

8. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

- ① $q \rightarrow p$
- ② $p \rightarrow q$
- ③ $\sim p \rightarrow \sim q$
- ④ $\sim p \rightarrow q$
- ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

‘명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.’

$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$ (참)

$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$ (참)

9. $x - 4 = 0$ 이 $x^2 + ax - 48 = 0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

10. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$ 가 성립한다. $a > 1$ 일 때, a, b, c 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < c < a$

④ $c < a < b$

⑤ $c < b < a$

해설

$$3a - b + c = 2 \cdots \cdots ①$$

$$a + b + c = 4 \cdots \cdots ②$$

$$① + ② \text{ 하면 } 4a + 2c = 6$$

$$2a + c = 3, a > 1 \text{ 이므로}$$

$$c = 3 - 2a \text{ 에서 } c < 1$$

$$① - ② \text{ 하면 } 2a - 2b = -2$$

$$\therefore a - b = -1, b = a + 1 \text{ 이므로}$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } b > a$$

$$\therefore c < a < b$$

11. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

12. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$

② $A < B$

③ $A \geq B$

④ $A \leq B$

⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

13. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$$\begin{aligned} &|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \text{ 이므로 } (|a| + |b|)^2, |a + b|^2 \text{ 의 대소를} \\ &\text{비교하면 된다.} \\ &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
- ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
- ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
- ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
- ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

14. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 ‘ $\sim p$ 또는 q ’의 부정은?

$$p : -1 < x \leq 3, \quad q : 0 < x \leq 2$$

- ① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$
- ② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
- ③ $-1 < x \leq 3$
- ④ $0 < x \leq 2$
- ⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim(\sim p \text{ 또는 } q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데
 $\sim q : x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$
 $\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

15. 명제 ‘ $x > 1$ 인 어떤 x 에 대하여 $x^2 < 1$ 또는 $x^2 = 1$ ’의 부정은?

- ① $x \leq 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$
- ② $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$
- ③ $x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$
- ④ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$
- ⑤ $x \leq 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$

해설

$x > 1$ 은 대전제이므로 부정이 적용되지 않는다.

$\sim$ (어떤 x) $\leftrightarrow$ (모든 x), $\sim$ (또는) $\leftrightarrow$ (그리고),

$\sim (x^2 < 1) \leftrightarrow (x^2 \geq 1)$, $\sim (x^2 = 1) \leftrightarrow (x^2 \neq 1)$

따라서 주어진 명제의 부정은 ‘ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ ’이다.

16. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P^c \cup Q$

④ $P \cup Q^c$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

17. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 두 조건 $p : x^2 = 3x$, $q : x \geq 2$ 에 대하여 조건 ‘ p 이고 $\sim q$ ’를 만족하는 집합은?

- ① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{3\}$ ④ $\{0, 1\}$ ⑤ $\{3, 5\}$

해설

p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{0, 3\}, Q = \{2, 3, 4, 5\}$

‘ p 이고 $\sim q$ ’ 를 만족하는 집합은 $P \cap Q^c$

$\therefore P \cap Q^c = P - Q = \{0\}$

18. 다음 <보기>의 조건 ‘ $p(x)$ ’를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

- (1) $p(x) : x$ 는 12의 양의 약수이다.
 $P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
 $P = \emptyset$
(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
 $P = \{1, 4\}$
(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
 $P = R$

① (1), (2)

② (2), (3)

③ (3), (4)

④ (2), (4)

⑤ (1), (3)

해설

- (1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \emptyset$
(3) $P = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

19. 다음 명제 중에서 역이 참인 명제는?

- ① x, y 가 유리수이면 $x + y$ 도 유리수이다.
- ② $x = y$ 이면 $xm = ym$ 이다.
- ③ 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 > 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.
- ④ $x = 2$ 이면 $x^2 = 4$ 이다.
- ⑤ 6의 배수는 3의 배수이다.

해설

- ① $x + y$ 가 유리수 $\rightarrow x, y$ 가 유리수 (거짓)
반례) $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ 라 하면 $x + y = 2$ (유리수)
- ② $xm = ym \rightarrow x = y$ (거짓)
반례) $x = 1, y = 2, m = 0, xm = ym = 0$
- ③ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0 \rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (참)
- ④ $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ (거짓)
 $x^2 = 4$ 이면 $x = \pm 2$ 이다.
- ⑤ 3의 배수 $\rightarrow$ 6의 배수 (거짓)
반례) 9는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

20. 다음 명제 중 이가 참인 것은?

- ① $a > 3$ 이면 $a^2 > 9$ 이다.
- ② x 가 4 의 배수이면 x 는 짝수이다.
- ③ $a^2 = ab$ 이면 $a = b$ 이다.
- ④ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.
- ⑤ $x > 0, y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

해설

① $a \leq 3$ 이면 $a^2 \leq 9$ 이다. (거짓)
(반례) $a = -4$

② x 가 4 의 배수가 아니면 x 는 홀수이다. (거짓)
(반례) $x = 6$

③ $a^2 \neq ab$ 이면 $a \neq b$ 이다 (참)
(대우) $a = b$ 이면 $a^2 = ab$ 이다.

④ $a \geq b$ 이면 $|a| \geq |b|$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 1, b = -2$

⑤ $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. (거짓)
(반례) $x = -1, y = 2$

21. m, n 이 정수일 때, 명제 「 $m^2 + n^2$ 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.」의 역, 이, 대우 중 참인 것을 모두 적으면?
- ① 역 ② 이 ③ 대우
④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

(i) 역 : 「 mn 이 짝수이면 $m^2 + n^2$ 은 홀수이다.」
 $m = n = 2$ 이면 mn 은 짝수이고 $m^2 + n^2 = 8$ 도 짝수이므로 역은 거짓인 명제이다.
(ii) 역과 이는 서로 대우의 관계가 성립하므로 이도 거짓인 명제이다.
(iii) 대우 : 「 mn 이 홀수이면 $m^2 + n^2$ 은 짝수이다.」
 mn 이 홀수이면 m, n 이 홀수이므로
 $m = 2k + 1, n = 2l + 1$ (k, l 은 정수)로 나타낼 수 있다.
 $m^2 + n^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2$
 $= 2(2k^2 + 2l^2 + 2k + 2l + 1)$ 이므로
 $m^2 + n^2$ 은 짝수이다.
따라서 대우는 참인 명제이다.

22. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

- ㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.

㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

- ① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.
 $p \Rightarrow q, p \Rightarrow r$ 에서 대우명제도 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 에서 ‘머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.’
 $\sim r \Rightarrow \sim p$ 에서 ‘물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.’

23. 두 명제 「 $p \leftrightarrow q$ 」, 「 $r \rightarrow \sim q$ 」가 모두 참일 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ?

① $q \rightarrow \sim r$

② $p \rightarrow \sim r$

③ $q \leftrightarrow p$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

- ① 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이므로 $r \rightarrow \sim q$ 이면 $q \rightarrow \sim r$ 이다.
- ② $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow \sim r$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ (삼단논법)
- ③ $p \leftrightarrow q$ 이면 $q \leftrightarrow p$
- ④ 반드시 $r \leftrightarrow p$ 라고 말할 수는 없다.
- ⑤ 위의 ② 에서 $p \rightarrow \sim r$ 이면 $r \rightarrow \sim p$

24. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $p : a \geq b, q : a^2 \geq b^2$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $p : a + b \leq 2, q : a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $p : |a - b| = |a| - |b|, q : (a - b)b \geq 0$

- $\textcircled{\text{1}}$ $\textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{\text{2}}$ $\textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{3}}$ $\textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{4}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{5}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow p$ 가 거짓인 것을 찾는다.
 $\textcircled{\text{㉠}}$ $a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$ (거짓), 반례 : $a = -1, b = -2$
 $a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$ (거짓), 반례: $a = -4, b = 3$
 $\textcircled{\text{㉡}}$ $a + b \leq 2 \rightarrow a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$ (참), $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1 \rightarrow a + b \leq 2$ (거짓), 반례 : $a = 0, b = 3$
 $\textcircled{\text{㉢}}$ $|a - b| = |a| - |b| \leftrightarrow (a - b)b \geq 0$
 p, q 모두 $a \geq b, b \geq 0$ 또는 $a \leq b, b \leq 0$ 이므로 필요충분조건이다.

26. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
- ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 $q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
 $r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$
 $\therefore q \rightarrow p$ { p 는 q 이기 위한 필요조건 }
 q 는 p 이기 위한 충분조건
 $q \rightarrow r$ { p 는 r 이기 위한 필요조건 }
 r 은 p 이기 위한 충분조건

27. 다음 <보기>의 ()안에 알맞은 것을 차례대로 바르게 적은 것은?

보기

(가) 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 ()조건이다.
(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 ()조건이다.

- ① 충분, 충분
- ② 필요, 충분
- ③ 필요, 필요
- ④ 필요충분, 필요
- ⑤ 필요충분, 필요충분

해설

(가) $A \cup C = B \cup C \quad \overset{\times}{\rightleftharpoons} \quad A = B$
반례) $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$ 인 경우 $\therefore$ 필요조건
(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0, (x - y)^2 = 0$ 이므로
 $x = y \quad \overset{\times}{\rightleftharpoons} \quad x = y = 0$
 $\therefore$ 필요조건

28. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y 는 실수)

- ① $p : a < 0, q : \sqrt{a^2} = -a$
- ② $p : xy < 0, q : x < 0$ 이고 $y > 0$
- ③ $p : xy = 0, q : x = 0$ 또는 $y = 0$
- ④ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$
- ⑤ $p : x, y$ 가 유리수, $q : x + y, xy$ 가 유리수

해설

② 충분조건일 때 의 반례는 $x > 0$ 이고, $y < 0$ 인 경우이다.

29. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

30. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \\ &= 2\sqrt{ab} \quad (\because a + b = 1) > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$$

31. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ㉠ $|a| = -a$
- ㉡ $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ㉣ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ㉠ $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$
- ㉡ 참
- ㉢ 참
- ㉣ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

32. 두 수 $2^{30}, 3^{20}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$

② $2^{30} \leq 3^{20}$

③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \geq 3^{20}$

⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$$\therefore 2^{30} < 3^{20}$$

33. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

34. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}, G = \sqrt{xy}, H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $G \geq A \geq H$
- ② $A \geq H \geq G$
- ③ $A \geq G \geq H$
- ④ $H \geq G \geq A$
- ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
 $\therefore A \geq G \cdots \textcircled{1}$
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
 $\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$
 $\therefore G \geq H \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $A \geq G \geq H$

35. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

36. m 이 실수 일 때, $2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 \geq k$ 를 만족하는 k 의 최댓값을 구하시오.
(단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m 이 실수이고, $m \neq 0$ 이므로 $m^2 > 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서, } 2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 &\geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{8}{m^2}} - 2 \\ &= 2\sqrt{16} - 2 = 8 - 2 = 6\end{aligned}$$

37. 양의 실수 a, b 에 대하여, $(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)$ 이고,

a, b 가 양의 실수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하면

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$$

따라서 $(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값은 4이다.(단, 등호는 $a = b = 1$ 일 때 성립)

38. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{9}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$$xy + 1 + 9 + \frac{9}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{xy \cdot \frac{9}{xy}} + 10$$

$$= 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

39. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
 - 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

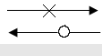
③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$



$a = b \therefore$ 필요

$\{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\} \supset \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 배수}\} \therefore$ 필요

40. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0, q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$