1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 대우인 $q \to p$ 가 참

따라서 $Q \subset P$

2. 전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \phi$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

3. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $P^c \subset Q$ ③ $Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$ ⑤ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

해설

명제 $p \to \sim q$ 가 참이므로

$P \subset Q^c$

$\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$

$\Leftrightarrow Q \subset P^c$

4. 명제 '$a = 1$ 이면 $a^2 = a$ 이다.'에 대하여 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고르면?

① 역 ② 이 ③ 대우

④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

$a^2 - a = a(a-1) = 0$, $a = 0,\ 1$

역 : '$a^2 = a$이면 $a = 1$이다.' → 거짓

이 : '$a \neq 1$ 이면 $a^2 \neq a$ 이다.' → 거짓

대우 : '$a^2 \neq a$이면 $a \neq 1$이다.' → 참

5. 명제「$p \rightarrow \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \rightarrow \sim p$」도 참이다.

6. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.

② 어떤 명제의 역과 이는 서로 대우 관계이다.

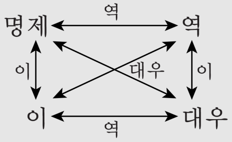
③ 어떤 명제의 역, 이, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.

④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.

⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이다. 아래 그림처럼 '역'의 대우가 '이'이다.



7. 명제 ‘이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.’의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.

② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.

③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.

④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.

⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

8. $\sim p \to \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \to p$ ② $p \to q$ ③ $\sim p \to \sim q$

④ $\sim p \to q$ ⑤ $p \to \sim q$

해설

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'

$\sim p \ \to \ \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \ \to \ \sim p$(참)

$\sim q \ \to \ \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \ \to \ q$(참)

9. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x-4=0 \Rightarrow x^2+ax-48=0$

$\therefore\ 16+4a-48=0$

$\therefore\ a=8$

10. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$가 성립한다. $a > 1$일 때, a, b, c의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < c < a$

④ $c < a < b$ ⑤ $c < b < a$

해설

$3a - b + c = 2 \cdots\cdots ①$

$a + b + c = 4 \cdots\cdots ②$

① + ② 하면 $4a + 2c = 6$

$2a + c = 3$, $a > 1$이므로

$c = 3 - 2a$에서 $c < 1$

① − ② 하면 $2a - 2b = -2$

$\therefore a - b = -1,\ b = a + 1$이므로

$a > 1$이므로 $b > a$

$\therefore c < a < b$

11. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$　② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$　④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

12. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$　　② $A < B$　　③ $A \geq B$

④ $A \leq B$　　⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

13. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
>
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
>
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
>
> $= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2)$
>
> $= 2([\text{다}]) \geq 0$
>
> (단, 등호는 $[\text{라}] \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$

$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= 2(|ab| - ab) \geq 0$

(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

14. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은?

$$p \ : \ -1 < x \leq 3, \quad q \ : \ 0 < x \leq 2$$

① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$

③ $-1 < x \leq 3$

④ $0 < x \leq 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim(\sim p$ 또는 $q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q \ : \ x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

15. 명제 '$x > 1$ 인 어떤 x 에 대하여 $x^2 < 1$ 또는 $x^2 = 1$ '의 부정은?

① $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

② $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

③ $x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

④ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

⑤ $x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \ge 1$

해설

$x > 1$은 대전제이므로 부정이 적용되지 않는다.
$\sim$ (어떤x) $\leftrightarrow$ (모든 x), $\sim$ (또는) $\leftrightarrow$ (그리고),
$\sim (x^2 < 1) \leftrightarrow (x^2 \ge 1)$, $\sim (x^2 = 1) \leftrightarrow (x^2 \ne 1)$
따라서 주어진 명제의 부정은 '$x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ '이다.

16. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라고 할 때, 'p 또는~ q'를 만족하는 집합을 구하면?

① $P-Q$　② $Q-P$　③ $P^c \cup Q$
④ $P \cup Q^c$　⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 'p 또는~ q'를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

17. 전체집합 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$ 에서 두 조건 $p: x^2=3x,\ q: x\geq 2$ 에 대하여 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합은?

① $\{0\}$　② $\{1\}$　③ $\{3\}$　④ $\{0,1\}$　⑤ $\{3,5\}$

해설

p,q 를 만족하는 집합을 각각 P,Q 라 하면

$P=\{0,3\}, Q=\{2,3,4,5\}$

'p 이고 $\sim q$' 를 만족하는 집합은 $P\cap Q^c$

$\therefore P\cap Q^c=P-Q=\{0\}$

18. 다음 <보기> 의 조건 '$p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
$P = \varnothing$
(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
$P = \{1, 4\}$
(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
$P = R$

① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)
④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

(1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0$ $\therefore P = \varnothing$
(3) $P = \left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

19. 다음 명제 중에서 역이 참인 명제는?

① x, y 가 유리수이면 $x+y$ 도 유리수이다.

② $x=y$ 이면 $xm=ym$ 이다.

③ 실수 x, y 에 대하여 $x^2+y^2>0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

④ $x=2$ 이면 $x^2=4$ 이다.

⑤ 6의 배수는 3의 배수이다.

해설

① $x+y$ 가 유리수 $\rightarrow$ x, y 가 유리수 (거짓)
반례) $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ 라 하면 $x+y=2$(유리수)
② $xm=ym \rightarrow x=y$ (거짓)
반례) $x=1$, $y=2$, $m=0$, $xm=ym=0$
③ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ $\rightarrow$ $x^2+y^2>0$ (참)
④ $x^2=4 \rightarrow x=2$ (거짓)
$x^2=4$ 이면 $x=\pm 2$ 이다.
⑤ 3의 배수 $\rightarrow$ 6의 배수 (거짓)
반례) 9는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

20. 다음 명제 중 이가 참인 것은?

① $a > 3$ 이면 $a^2 > 9$ 이다.

② x 가 4 의 배수이면 x 는 짝수이다.

③ $a^2 = ab$ 이면 $a = b$ 이다.

④ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

⑤ $x > 0, y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

해설

① $a \leq 3$ 이면 $a^2 \leq 9$ 이다. (거짓)
(반례) $a = -4$
② x 가 4 의 배수가 아니면 x 는 홀수이다. (거짓)
(반례) $x = 6$
③ $a^2 \neq ab$ 이면 $a \neq b$ 이다 (참)
(대우) $a = b$ 이면 $a^2 = ab$ 이다.
④ $a \geq b$ 이면 $|a| \geq |b|$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 1,\ b = -2$
⑤ $x \leq 0$ 또는$y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. (거짓)
(반례) $x = -1,\ y = 2$

21. m, n 이 정수일 때, 명제 「m^2+n^2 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.」의 역, 이, 대우 중 참인 것을 <u>모두</u> 적으면?

① 역 ② 이 ③ 대우

④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

(ⅰ) 역 : 「mn 이 짝수이면 m^2+n^2 은 홀수이다.」
$m=n=2$ 이면 mn 은 짝수이고 $m^2+n^2=8$ 도 짝수이므로 역은 거짓인 명제이다.
(ⅱ) 역과 이는 서로 대우의 관계가 성립하므로 이도 거짓인 명제이다.
(ⅲ) 대우 : 「mn 이 홀수이면 m^2+n^2 은 짝수이다.」
mn 이 홀수이면 m, n 이 홀수이므로
$m=2k+1$, $n=2l+1$ (k, l 은 정수)로 나타낼 수 있다.
$m^2+n^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2$
$=2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)$ 이므로
m^2+n^2 은 짝수이다.
따라서 대우는 참인 명제이다.

22. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다. ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.

② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.

③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.

④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다.$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로$\sim q \Rightarrow \sim p$에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.'$\sim r \Rightarrow \sim p$에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

23. 두 명제 「$p \leftrightarrow q$ 」, 「$r \rightarrow \sim q$ 」가 모두 참일 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ?

① $q \rightarrow \sim r$　　② $p \rightarrow \sim r$　　③ $q \leftrightarrow p$

④ $r \rightarrow p$　　⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

① 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이므로 $r \rightarrow \sim q$ 이면 $q \rightarrow \sim r$ 이다.

② $p \rightarrow q$ 이고 $q \rightarrow \sim r$ 이면 $p \rightarrow \sim r$ (삼단논법)

③ $p \leftrightarrow q$ 이면 $q \leftrightarrow p$

④ 반드시 $r \leftrightarrow p$ 라고 말할 수는 없다.

⑤ 위의 ② 에서 $p \rightarrow \sim r$ 이면 $r \rightarrow \sim p$

24. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

㉠ $p: a \geq b,\ q: a^2 \geq b^2$

㉡ $p: a+b \leq 2,\ q: a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$

㉢ $p: |a-b| = |a|-|b|,\ q: (a-b)b \geq 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow p$ 가 거짓인 것을 찾는다.

㉠ $a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$(거짓), 반례 : $a=-1, b=-2$

$a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$ (거짓), 반례: $a=-4, b=3$

㉡ $a+b \leq 2 \rightarrow a \leq 1$ 또는$b \leq 1$ (참), $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1 \rightarrow a+b \leq 2$(거짓), 반례 : $a=0, b=3$

㉢ $|a-b| = |a|-|b| \leftrightarrow (a-b)b \geq 0$

$p,\ q$ 모두 $a \geq b,\ b \geq 0$ 또는 $a \leq b,\ b \leq 0$이므로 필요충분조건이다.

25. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ **답 :** ________조건

▷ **정답 :** 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\},\ Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

26. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$

$q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$

$r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$

$\therefore q \rightarrow p$ $\{p$ 는 q이기위한필요조건$\}$

q 는 p이기위한충분조건

$q \rightarrow r$ $\{p$ 는 r이기위한필요조건$\}$

r 은 p 이기 위한 충분조건

27. 다음 <보기> 의 (   )안에 알맞은 것을 차례대로 바르게 적은 것은?

보기

(가) 세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 $A \cup C = B \cup C$인 것은 $A = B$이기 위한 (   )조건이다.

(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$은 $x = y = 0$이기 위한 (   ) 조건이다.

① 충분, 충분
② 필요, 충분
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 필요
⑤ 필요충분, 필요충분

해설

(가) $A \cup C = B \cup C \quad \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} \quad A = B$

반례) $A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{1,\ 2\}$ 인 경우 $\therefore$ 필요조건

(나) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, $(x-y)^2 = 0$ 이므로

$x = y \quad \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} \quad x = y = 0$

$\therefore$ 필요조건

28. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y는 실수)

① $p : a < 0$, $q : \sqrt{a^2} = -a$

② $p : xy < 0$, $q : x < 0$ 이고 $y > 0$

③ $p : xy = 0$, $q : x = 0$ 또는 $y = 0$

④ $p : A \cup (B - A) = B$, $q : A \subset B$

⑤ $p : x,\ y$ 가 유리수, $q : x + y,\ xy$ 가 유리수

해설

② 충분조건일 때 의 반례는 $x > 0$ 이고, $y < 0$ 인 경우이다.

29. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1+a}$와 $\dfrac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$
② $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b}$
③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$
④ $\dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{b}{1+b}$
⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$

$(\because a > b > 0)$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$a > b > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1+b}{b}$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

30. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \\ &= 2\sqrt{ab}\ (\because a + b = 1) > 0\end{aligned}$$

$\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

31. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(|a|+|b|+|c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$

$|a||b| \geq ab, \ |b||c| \geq bc, \ |c||a| \geq ca$

$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2 \ (\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

32. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$　② $2^{30} \leq 3^{20}$　③ $2^{60} > 3^{20}$

④ $2^{60} \geq 3^{20}$　⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

33. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

34. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A=\dfrac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\dfrac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$

$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

35. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

② $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

③ $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

④ $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

⑤ $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

36. m이 실수 일 때, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하시오. (단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m이 실수이고, $m \neq 0$이므로 $m^2>0$이다.

따라서, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \dfrac{8}{m^2}}-2$

$$= 2\sqrt{16}-2 = 8-2 = 6$$

37. 양의 실수 a, b에 대하여, $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)$ 이고,

a, b가 양의 실수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하면

$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}+2\sqrt{b\times\frac{1}{b}}=4$

따라서 $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값은 4이다.(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

38. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{9}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$$xy + 1 + 9 + \frac{9}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{xy \cdot \frac{9}{xy}} + 10$$

$$= 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

39. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

> • $|a|=|b|$ 는 $a=b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
> • 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요　　② 필요, 충분

③ 충분, 충분　　④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a|=|b| \;\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}\; a=b$ ∴ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ ∴ 필요

40. $q > p > 1$ 인 실수 $p,\ q$ 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$
② $pq + p \le p^2 + q$
③ $pq + p > p^2 + q$
④ $pq + p \ge p^2 + q$
⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p-1) - p(p-1) \\ &= (p-1)(q-p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0,\ q - p > 0$
따라서 $(p-1)(q-p) > 0$ 이므로
$pq + p > p^2 + q$