1. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
a_n 은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열
$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$
$\therefore a_{10} = 31$

2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115　② 270　③ 326　④ 445　⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{20} = \dfrac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$

3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

4. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$　　② $10\log_3 2$　　③ $11\log_3 2$

④ 9　　⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

5. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$

④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.

(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

6. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$\vdots$

$+\ \underline{a_n = a_{n-1} + (n-1)}$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ &= -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

7. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면
$a_{n+1} - a_n = 2^n$이므로 $b_n = 2^n$
따라서 $n \geq 2$일 때,
$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$ 이때, $a_1 = 1$은 ㉠을 만
$= 2^n - 1 \cdots\cdots$ ㉠
족시키므로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$
$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$

8. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)}$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

9. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, a_{100}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$에서
$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$
$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로
$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$
$a_n = 2^n$
$\therefore\ a_{100} = 2^{100}$

10. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}(n \ge 2)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 2014 항은?

① 5 ② 3 ③ -2 ④ -3 ⑤ -5

해설

$a_1 = 3$
$a_2 = 5$
$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$
$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$
$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$
$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$
$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$
$\vdots$
이므로 수열 $\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2$가 계속해서 반복된다.
이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$이므로
$a_{2014} = a_4 = -3$

11. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$

$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

12. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
∴ ①

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠] 에 알맞은 것은?

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ①이다.
> ①의 양변에 $2k+3$를 더하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
> 이므로 [㉠] 일 때에도 성립한다.
> 따라서 (i), (ii) 에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$　② $n=-k+2$　③ $n=k+1$
④ $n=k+2$　⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii) 에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

14. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4} \\ &= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$

$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$

$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=2^{1-1}(1+3)=4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $=2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

16. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$ ② $3^{10}-1$ ③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$
④ $2(3^{10}-1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$이므로 $r = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$

$= \frac{3}{2}(3^{10}-1)$

17. 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음과 같은 조건을 만족한다.

㉠ $x \in N,\ y \in N$이면 $f(x+y) = f(x)f(y)$이다.
㉡ $f(1) = 3$

수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$으로 정의할 때, a_{10}의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 3^{36} ② 3^{42} ③ 3^{45} ④ 3^{55} ⑤ 3^{66}

해설

㉠에서 $x = n,\ y = 1$로 놓으면
$f(n+1) = f(1)f(n) \quad \therefore\ f(n+1) = 3f(n)$
수열 $\{f(n)\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 $f(n) = 3^n$
이때, $a_{n+1} = 3^n a_n$이므로
$a_n = a_1 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdots 3^{n-1} = 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$
$= 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$
$\therefore\ a_{10} = 3^{\frac{10\times9}{2}} = 3^{45}$

18. 다음과 같은 관계식으로 정의된 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

① $2^{n-2} + \frac{2}{5}$　② $2^{n-2} + 3$　③ $2^n + 1$

④ $2^{n+1} - 1$　⑤ $2^{n+2} - 5$

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 1$을 변형하면
$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ 이므로
수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 4$이고,
공비가 2인 등비수열이 된다.
따라서 $a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$
그러므로 $a_n = 2^{n+1} - 1$

19. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0),\ P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$

③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

20. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10% 씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$로 계산한다.)

① 150톤　　② 165톤　　③ 177톤

④ 186톤　　⑤ 197톤

해설

n년 후 남아있는 오염물질의 양을 $\{a_n\}$
이라하면

$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$

a_1은 1년 후 오염물질의 양이므로

$a_1 = 250 \times 0.9 + 15 = 240$

$(a_{n+1} - \alpha) = 0.9(a_n - \alpha)$

$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.1\alpha$

$0.1\alpha = 15 \quad \alpha = 150$

$\therefore a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$

$a_n - 150 = (a_1 - 150) \times 0.9^{n-1}$

$a_n = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$

$a_{10} = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$

$90 \times 0.4 + 150 = 186$

21. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2,\ \ b=2$
$\therefore a+b=4$

22. 다음은 $h > 0$일 때, $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\text{(가)}}$ 이므로
㉠이 성립한다.
ii) $n = k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{(가)}})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$
② $1+2h,\ 1+(k+1)h$
③ $1+h^2,\ 1+kh$
④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$
⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{1+2h}$ 이므로 ㉠ 이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{1+kh})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

23. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_n + a_{n+1} = n(n \geq 1)$을 만족할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_2 = 0$

㉡ 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n$의 최댓값은 2이다.

㉢ $\sum_{n=1}^{50}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 49$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_1 = 1,\ a_1 + a_2 = 1$일 때,

$a_2 = 1 - a_1 = 1 - 1 = 0$(참)

㉡ $a_n + a_{n+1} = n \cdots$①

$a_{n+1} + a_{n+2} = n + 1 \cdots$②

② − ①을 하면 $a_{n+2} - a_n = 1$

(i) $n = 2k - 1$(k는 자연수)

$a_{2k-1} = 1 + (k-1) \cdot 1 = k$

(ii) $n = 2k$(k는 자연수)

$a_{2k} = 0 + (k-1) \cdot 1 = k - 1$

따라서 $n = 2k - 1$일 때,

$a_{n+1} - a_n = (k-1) - k = -1$

$n = 2k$일 때,

$a_{n+1} - a_n = (k+1) - (k-1) = 2$이므로

$a_{n+1} - a_n$의 최댓값은 2이다. (참)

㉢ $a_{2n-1} - a_{2n} = n - (n-1) = 1$이므로

$\sum_{n=1}^{50}(a_{2n-1} - a_{2n}) = \sum_{n=1}^{50} 1 = 50$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

24. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 2}$로 정의될 때, $[a_{10}]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a_{n+1} - \alpha = \dfrac{\beta(a_n - \alpha)}{a_n + 2}$의 꼴로 고치면 $\alpha + \beta = 3,\ -\alpha\beta + 2\alpha = 2$이므로 $(\alpha,\ \beta)$은 $(2,\ 1)$ 또는 $(-1,\ 4)$이다.

$(\alpha,\ \beta) = (2,\ 1)$이라고 하면 $a_{n+1} - 2 = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} \cdots$ ㉠

㉠식의 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1} - 2} = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 2} = 1 + \dfrac{4}{a_n - 2} \cdots$ ㉡

㉡식을 $\dfrac{1}{a_{n+1} - 2} - k = 4\left(\dfrac{1}{a_n - 2} - k\right)$꼴로 고치면 $k = -\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{a_{n+1} - 2} + \dfrac{1}{3} = 4\left(\dfrac{1}{a_n - 2} + \dfrac{1}{3}\right)$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n - 2} + \dfrac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$이고, 공비가 4인 등비수열이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{a_n - 2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \cdot 4^{n-1} = \dfrac{1}{3} \cdot 4^n$

이 식을 a_n에 대해서 정리하면 $a_n = \dfrac{3}{4^n - 1} + 2$

$\therefore\ [a_{10}] = \left[\dfrac{3}{4^{10} - 1} + 2\right] = 2$

25. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$　② $a_{101} - a_{50}$　③ $a_{101} - a_{51}$　④ $a_{102} - a_{51}$　⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

(i)
$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_3 - a_2 \\ & a_2 = a_4 - a_3 \\ & \vdots \\ +) & \underline{a_{100} = a_{102} - a_{101}} \\ & \sum_{k=1}^{100} a_k = a_{102} - a_2 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_3 - a_2 \\ & a_2 = a_4 - a_3 \\ & \vdots \\ +) & \underline{a_{50} = a_{52} - a_{51}} \\ & \sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2 \end{array}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=51}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\ &= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\ &= a_{102} - a_{52} \end{aligned}$$