

1. $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

2. $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 3(n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115

② 270

③ 326

④ 445

⑤ 590

3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1}

② 2^n

③ 2^{n-2}

④ 2^{n+1}

⑤ $\frac{1}{2}n$

4. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9 \log_3 2$

② $10 \log_3 2$

③ $11 \log_3 2$

④ 9

⑤ 10

5. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(0)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(k+1)$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k

② 0, $k+1$

③ 0, $k-1$

④ 1, k

⑤ 1, $k+1$

6. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.



답:

7. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 511

② 512

③ 513

④ 1023

⑤ 1025

8. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.



답:

9. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_2 = 4$ 이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, a_{100} 의 값을 구하면?

① 2^{10}

② 2^{20}

③ 2^{40}

④ 2^{80}

⑤ 2^{100}

10. $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 2014 항은?

① 5

② 3

③ -2

④ -3

⑤ -5

11. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.



답: _____

12. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 $P(n)$ 으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면

이라 놓을 수 있다.

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$$

$$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$$

$$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$$

$$= 3(7m' + 4^k)$$

.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
- ② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
- ③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
- ④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
- ⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

13. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) = 3, (우변) = $1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면

$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots$ ①이다.

①의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면

$$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = -k + 1$

② $n = -k + 2$

③ $n = k + 1$

④ $n = k + 2$

⑤ $n = 2k + 1$

14. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{7})^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\textcircled{7})^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{7})^3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{7})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2 (\textcircled{L})^2}{4} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\textcircled{L})}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

위의 증명 과정에서 $\textcircled{7}$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\textcircled{L}$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.



답:

15. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$$

양변에 4를 곱하면

$$4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$$

$$= 2^k(2 + 2 \cdot 3^k)$$

$$= 2^k(1 + 1 + 2 \cdot 3^k) < 2^k(1 + 3^k + 2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

16. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$ 인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10} - 1)$

② $3^{10} - 1$

③ $\frac{3}{2}(3^{10} - 1)$

④ $2(3^{10} - 1)$

⑤ $\frac{5}{2}(3^{10} - 1)$

17. 자연수 전체의 집합 N 을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 가 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad x \in N, y \in N \text{이면 } f(x+y) = f(x)f(y) \text{ 이다.}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad f(1) = 3$$

수열 $\{a_n\}$ 을 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$ 으로 정의할 때, a_{10} 의 값은?
(단, n 은 자연수이다.)

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad 3^{36}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad 3^{42}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad 3^{45}$$

$$\textcircled{\text{㉣}} \quad 3^{55}$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \quad 3^{66}$$

18. 다음과 같은 관계식으로 정의된 수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ (단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

① $2^{n-2} + \frac{2}{5}$

② $2^{n-2} + 3$

③ $2^n + 1$

④ $2^{n+1} - 1$

⑤ $2^{n+2} - 5$

19. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$ 는 점 $P_n(a_n)$ 과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$ 을 연결하는 선분 P_nP_{n+1} 을 $2:3$ 으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$ 일 때, 점 P_n 의 좌표 a_n 은?

① $\frac{25}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$

③ $\frac{25}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$

⑤ $\frac{25}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}$

② $\frac{25}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right\}$

④ $\frac{25}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}$

20. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10%씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$ 로 계산한다.)

① 150톤

② 165톤

③ 177톤

④ 186톤

⑤ 197톤

21. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$ 가 참이다.

(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.



답: _____

22. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{가}}$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때, $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k = 1 + kh$$

$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{가}})(1+h) > 1+(k+1)h$ 따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{㉠}$ 은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1 + 2h, 1 + kh$

② $1 + 2h, 1 + (k+1)h$

③ $1 + h^2, 1 + kh$

④ $1 + h^2, 1 + (k+1)h$

⑤ $2h + h^2, 1 + kh$

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = n(n \geq 1)$ 을 만족할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $a_2 = 0$
- ㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n$ 의 최댓값은 2 이다.
- ㉢ $\sum_{n=1}^{50} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 49$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$ 로 정의될 때, $[a_{10}]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



답:

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족할 때, 다음
중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$ 와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$

② $a_{101} - a_{50}$

③ $a_{101} - a_{51}$

④ $a_{102} - a_{51}$

⑤ $a_{102} - a_{52}$