

1. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

2. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?
- ① $\emptyset$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{3, 4, 5\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
 $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
 $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
 $x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

3. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
- ④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

- ①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)
- ② : 대우는 ‘ nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.’ nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
- ④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
- ⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

4. 두 명제 ‘겨울이 오면 춥다.’ ‘눈이 오지 않으면 춥지 않다.’가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?
- ① 추우면 눈이 온다.
 - ② 눈이 오면 겨울이 온다.
 - ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 - ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 - ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ⇔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ⇔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 ‘눈이 오면 겨울이 온다’는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

5. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

6. 명제 p , q , r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?
- (1) 필요 (2) 충분
(3) 필요충분 (4) 아무 조건도 아니다.
(5) q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
 즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
 즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
 그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
 따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

7. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

8. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식
 $\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균
④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

9. $a > 0$ 일 때, $2a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

10. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

11. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\emptyset$

② $\{0, 1\}$

③ $\{3, 4, 5\}$

④ $\{2, 3, 4, 5\}$

⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
 $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
 $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
 $x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

12. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cap Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow \sim q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$P \cap Q = P$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 따라서, $p \rightarrow q$ 가 참이므로 대우 명제인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

13. 명제 ‘모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?

- ① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.
- ② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.
- ⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘ $xy = yz = zx$ ’는 ‘ $xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ’이므로
‘ $xy = yz = zx$ ’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$
이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여
 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

14. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.'가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

15. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $q \rightarrow r$
- ② $\sim p \rightarrow \sim r$
- ③ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ④ $p \rightarrow r$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.

$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$

$\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$

$p \rightarrow q \rightarrow r$ 이므로, $p \rightarrow r(T)$

$\therefore \sim r \rightarrow \sim p(T)$

16. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면
(가) : ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
이 때, n 이 홀수이므로
 $n = (나)(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, $n^2 = (나)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다.
∴ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ② 이, $2k - 1, 홀수$
- ③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
- ⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로
∴ (가) : 대우
 n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k + 1$
 $2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times (정수)$ 의 형태이므로
∴ (다) : 0 또는 짝수

17. 다음은 명제 「 x, y 가 정수일 때 xy 가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 결론을 부정하여 (가)이면 $x = 2m + 1, y = (나)$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① x 또는 y 가 짝수, $2n$
- ② x, y 중 하나만 짝수, $2n$
- ③ x, y 중 하나만 홀수, $2n + 1$
- ④ x, y 모두 홀수, $2n + 1$
- ⑤ x, y 모두 짝수, $2n + 1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y 가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m + 1, (나): y = 2n + 1$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

18. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $xy = 0$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $x = y = 0$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $|x| + |y| = 0$
- $\textcircled{\text{㉣}}$ $(x + y)(x - y) = 0$
- $\textcircled{\text{㉤}}$ $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$
- $\textcircled{\text{㉥}}$ $|x + y| = |x - y|$

- $\textcircled{1}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{2}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉣}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- $\textcircled{3}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉥}}$
- $\textcircled{4}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉣}}, \textcircled{\text{㉥}}$
- $\textcircled{5}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}$

해설

$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
 $\textcircled{\text{㉠}}$ $x = 0$ 또는 $y = 0$
 $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ $x = y = 0$
 $\textcircled{\text{㉣}}$ $x = -y$ 또는 $x = y$
 $\textcircled{\text{㉤}}$ $x + y = 0, x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
 $\textcircled{\text{㉥}}$ $x + y = x - y$ 또는 $x + y = -x + y$
 $\Leftrightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
따라서, 보기중 $x^2 + y^2 = 0$ 이기 위한 필요충분조건은 $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}$ 이다.

20. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

- ① $|a| + |b| \geq |a + b|$
- ② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$
- ③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc(a > 0, b > 0, c > 0)$
- ④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$
- ⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{여기서}\end{aligned}$$

$$(a+2)(b+2) > 0 \text{ 이고}$$

$$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$(\because a \geq b > 0)$$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

21. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ㉠ $|a| = -a$
- ㉡ $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ㉣ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ㉠ $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$
- ㉡ 참
- ㉢ 참
- ㉣ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

22. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$

$-x^2 + 4x - 6 < 0$
- $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$

$x^2 - 6x + 9 > 0$
- $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$

$x^2 - 2x + 4 \geq 0$
- $\textcircled{\tiny \text{㉤}}$

$a = b < 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)
- $\textcircled{\tiny \text{㉥}}$

$a = b \leq 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$

1개
- $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$

2개
- $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$

3개
- $\textcircled{\tiny \text{㉤}}$

4개
- $\textcircled{\tiny \text{㉥}}$

5개

해설

$\textcircled{\tiny \text{㉡}}$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$

$\textcircled{\tiny \text{㉤}}$

$a = b \leq 0$ 이고, $ax - b \geq bx + a$

따라서 항상 성립하는 것은 $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$, $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$, $\textcircled{\tiny \text{㉤}}$ 의 3개이다.

23. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

24. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P, Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

- ① $\sim p \rightarrow \sim q$
- ② $q \rightarrow p$
- ③ $q \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$
 $Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$
 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.
 $\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

25. 명제 ‘ $|x - 1| < 1$ 이면 $|x - 1| \leq 2$ 이다.’의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고른 것은?

- ① 대우
- ② 역, 이
- ③ 이, 대우
- ④ 역, 대우
- ⑤ 역, 이, 대우

해설

$\{x \mid |x - 1| < 1\} = \{x \mid 0 < x < 2\}$
 $\{x \mid |x - 1| \leq 2\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$
역 : $|x - 1| \leq 2$ 이면 $|x - 1| < 1$ 이다.
 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\} \not\subset \{x \mid 0 < x < 2\}$ 이므로 거짓이다.
이 : $|x - 1| \geq 1$ 이면 $|x - 1| > 2$ 이다.
 $\{x \mid x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2\} \not\subset \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 3\}$ 이므로 거짓이다.
대우 : $|x - 1| > 2$ 이면 $|x - 1| \geq 1$ 이다.
 $\{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 3\} \subset \{x \mid x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2\}$ 이므로 참이다.

26. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

- ㉠ $p : |a| + |b| = 0 \quad q : ab = 0$
- ㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0 \quad q : (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$
- ㉢ $p : 0 < x < y \quad q : x^2 < y^2$
- ㉤ $p : x < y \quad q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉤
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0 \quad q : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족

㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0 \quad a = b$ 또는 $b = c \quad q : a = b$ 그리고 $b = c \therefore p \nRightarrow q$ 이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.

㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \nLeftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉤ $p \nRightarrow q$ ($\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1] = [1.5] = 1$ 일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

27. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이라면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$$r \Rightarrow \sim q \text{ 이므로 } q \Rightarrow \sim r$$

$$\sim p \Rightarrow q \text{ 이고 } q \Rightarrow \sim r \text{ 이므로 삼단논법에 의하여 } \sim p \Rightarrow \sim r$$

$$\therefore r \Rightarrow p$$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

28. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
- ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
 $= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 1$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
 $= (a+b) - b + a$
 $= 2a > 0$

$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
 $= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
 $= 2\sqrt{ab} - 2a$
 $= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$
 $\therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

29. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= x^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1 \\ &= (x^2 - x + 1)^2 + 1 \\ \therefore \text{준식} &= \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{이고} \\ x^2 - x + 1 &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로} \\ x^2 - x + 1 = t \text{로 치환 } t &\geq \frac{3}{4} \text{하면} \\ \text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} &= \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \\ \text{여기서 } t + \frac{1}{t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \\ (\because t &\geq \frac{3}{4}) \\ \text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{이고} \\ \frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{이다.} \end{aligned}$$

30. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

31. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례를 모두 구할 때, 그 개수는?

n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 경우가 반례가 된다.

n^2 이 12의 배수가 되지만 n 은 12의 배수가 되지 않아야 하므로 $n = 2 \times 3 \times (\text{홀수})$ 의 형태가 되어야 한다. 이에 따라 구해보면 $n = 2 \times 3 \times 1, 2 \times 3 \times 3, \dots, 2 \times 3 \times 15$

$\therefore n = 6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$ (8 개)

32. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq n(a^4 + b^4 + c^4)$ 을 만족하는 최소의 양의 정수 n 을 구하면?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x = a^2, y = b^2, z = c^2$ 이라 하면
 $(x - y)^2 \geq 0, (y - z)^2 \geq 0, (x - z)^2 \geq 0$ 이므로
 $x^2 + y^2 \geq 2xy, y^2 + z^2 \geq 2yz, z^2 + x^2 \geq 2zx$
 $\therefore (x + y + z)^2$
 $= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
 $= x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2)$
 $= 3(x^2 + y^2 + z^2)$
 $\therefore (a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq 3(a^4 + b^4 + c^4)$ (단, 등호는 $a = \pm b = \pm c$ 일 때 성립한다.)

33. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x + y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) (x + y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8 \right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2 \sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) \\&= \frac{1}{3} (10 + 8) = 6\end{aligned}$$