

1. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 $A \ominus B$ 와 $A \otimes B$ 을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$A \ominus B = A - 3B, A \otimes B = (A + B)B$$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$ 이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 x, y 에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$

② $x^4y^2 - xy^5$

③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$

⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의를 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$P - 2Q$$

$$\begin{aligned}&= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $13 = Q(1) + R$

$$\therefore Q(1) + R = 13$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

3. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

4. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023

② 1024

③ 1025

④ 2046

⑤ 2050

해설

$$x = 0 \text{ 대입, } a_0 = 1$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$$

5. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x-2, x-3$ 으로 나눈 나머지가 각각 2, 4, 6 일 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 11

⑤ 14

해설

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$a + b + c = 2, 4a + 2b + c = 4, 9a + 3b + c = 6$$

$$a = 0, b = 2, c = 0$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 2x$$

$$f(4) = 3 \times 2 \times 1 + 8 = 14$$

6. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -1 - 3 \cdot (-1) = 2$$

7. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$$

이 때, $t = 0$ 은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$ 이 1990년을 나타내도록 변형하면?

- ① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$
- ② $P = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$
- ③ $P = 0.35(t - 1)^2 - 5.75(t - 1) + 20.9$
- ④ $P = 0.35(t + 2)^2 - 5.75(t + 2) + 20.9$
- ⑤ $P = 0.35(t - 2)^2 - 5.75(t - 2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$ 일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$ 년, $t = 1 \rightarrow 1990$ 년, $t = 2 \rightarrow 1995$ 년

$P_2(t) = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$ 이면,

$P_2(0) = P_1(1)$ 이므로 $P_2(t)$ 에서

$t = 0 \rightarrow 1990$ 년임을 알 수 있다.

8. 다항식 $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x + \frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$

② $\frac{b}{Ra}$

③ $-\frac{b}{a}R$

④ $\frac{aR}{b}$

⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R$$

$$\therefore x \cdot f(x)$$

$$= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx$$

$$= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right)\{axQ(x) + R\} - \frac{b}{a}R$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x) + R$

$$\text{나머지는 } -\frac{bR}{a}$$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \text{에서}$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } f\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

$$x \cdot f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)Q'(x) + R' \text{이라 하면}$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = R'$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = R \text{를 대입하면 } R' = -\frac{b}{a}R$$

9. $a = \sqrt[3]{4}$, $b + c = \sqrt[3]{4}$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a = \sqrt[3]{4} \text{에서 } a^3 = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b + c = \sqrt[3]{4} \text{에서 } (b + c)^3 = 4$$

$$\text{즉 } b^3 + c^3 + 3bc(b + c) = 4$$

$$b + c = a \text{이므로}$$

$$b^3 + c^3 + 3abc = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하면

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = 4 + 4 = 8$$

10. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② 1

③ r_1

④ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$

⑤ $r_1 r_2 \cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
 &= (x-1)^2 f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^2 \{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^3 f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
 &\vdots \\
 &= (x-1)^n f_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots \\
 &\quad + r_2(x-1) + r_1
 \end{aligned}$$

$$R(x) = r_n(x-1)^{n-1} + \cdots + r_2(x-1) + r_1$$

$$\therefore R(2) = r_n + r_{n-1} + \cdots + r_2 + r_1$$