1. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.

② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.

③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.

④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.

⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

2. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?

① $2 < \sqrt{6} \leq 3$ ② 2는 소수가 아니다.

③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$ ④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$

⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

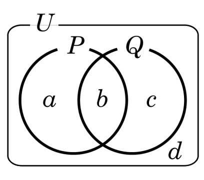
거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

3. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.' 는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

4. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　　② b　　③ c　　④ d　　⑤ a와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

5. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.
④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.
⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

6. 명제 「a, b가 모두 정수이면 $a+b$ 와 $a-b$ 도 모두 정수이다.」의 역, 이, 대우 중 참 인 것을 <u>모두</u> 적으면?

① 역 ② 이 ③ 대우

④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

주어진 명제 : a, b가 모두 정수이면 $a+b$와 $a-b$도 모두 정수이다.(참)
역 : $a+b$ 와 $a-b$도 모두 정수이면 a, b가 모두 정수이다.(거짓)
따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우가 참이 되고, 명제의 역이 거짓이므로 그 대우인 이도 거짓이다.

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$
$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

8. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$ ② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$ ④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설
$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$
$\therefore 2a+b > a+2b$

9. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1,\ B = \sqrt{3} + 2,\ C = 2\sqrt{3} + 1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　② $A < B < C$　③ $A < C < B$
④ $B < A < C$　⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

10. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

11. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건　　② 필요조건
③ 대우　　④ 필요충분조건
⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

12. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$p : a, b$ 는 모두 짝수 $\quad q : a+b$ 는 짝수

▶ 답 : ＿＿＿＿ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a=2m,\ b=2n$ $(n,\ m$ 은 자연수$)$ 이면,
$a+b=2m+2n=2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a=3,\ b=3$ 일 때 $a+b=6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 q 의 충분조건이다.

13. $p\ :\ x = 3$, $q\ :\ x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0,\ 3\}$ 이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P$ $\therefore$ 충분조건

14. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

15. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \le 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \ge 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

16. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$

$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$

17. $x>0,\ y>0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x>0,\ y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$=13+\frac{12y}{x}+\frac{3x}{y}$

$\geq 13+2\sqrt{\frac{12y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}$

$=13+12=25$

$\therefore (3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x}=\frac{3x}{y}$, 즉 $x=2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

18. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

19. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0$, $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

20. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

$12=2a+3b\geq 2\sqrt{6ab}$

$6\geq\sqrt{6ab},\ 36\geq 6ab\quad\therefore 6\geq ab$

21. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

22. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$

$=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+1$

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$ 에서

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2,\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

23. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \ge (x+3y)^2$
$\therefore -10 \le x+3y \le 10$
(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

24. 실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 5$를 만족할 때, $x + 2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M + m$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$

$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$이므로

$x + 2y$의 최댓값 $M = 5$, 최솟값 $m = -5$

$\therefore\ M + n = 5 + (-5) = 0$

25. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

26. $x \geq 0,\ y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2　　② 3　　③ $\sqrt{10}$　　④ $\sqrt{15}$　　⑤ 4

해설

$x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.