

1.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$  의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

2.  $x > 2$ 일 때  $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$x-2=t$ 로 놓으면  $t > 0$ 이고  $x=t+2$

따라서 주어진 식을  $t$ 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $4t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립)

3. 양의 실수  $x, y$ 에 대하여  $2x+y=1$  일 때,  $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

- ①  $2\sqrt{6}$       ②  $3\sqrt{6}$       ③  $4\sqrt{6}$       ④  $5\sqrt{6}$       ⑤  $6\sqrt{6}$

해설

$$x > 0, y > 0 \text{ 이므로 } 2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{xy} \text{이 최소가 되려면 } xy \text{가 최대가 되어야 하므로 } xy = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

4.  $x > 1$  일 때,  $2x + \frac{2}{x-1}$  는  $x = a$  일 때, 최솟값  $b$  를 갖는다. 이 때,  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left( x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \left( x + \frac{1}{x-1} \right) \geq 3 \cdot 2 = 6$$

최솟값은  $x-1 = \frac{1}{x-1}$  일 때 6이다

$\therefore$  즉,  $x = 2$  일 때 최솟값은 6이다.

$$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$$

5.  $x > 3$ 일 때  $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때,  $x > 3$ 이므로  $3(x-3) > 0$ ,  $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$ , 즉  $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

6. 양수  $x$ 에 대하여  $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는  $x = a$ 에서 최솟값  $b$ 를 가질 때,  $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

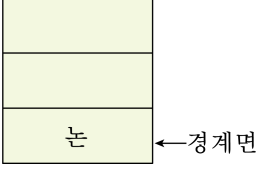
(단, 등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이  $2\sqrt{2} + 2$ 이므로  $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로  $a = \sqrt{2}$

따라서  $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

7. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가  $27\text{m}^2$ 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원                      ② 71만원                      ③ 72만원  
 ④ 73만원                      ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를  $x$ 라 하면  
 가로 길이는  $\frac{27}{x}$  m이므로  
 총 비용은  

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$
 $\therefore$  최소비용은 72만 원

8.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고,  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

9. 넓이가  $a$ 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여  $\triangle PAB$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 이라 할 때  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

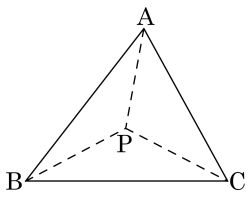
①  $\frac{a^2}{3}$

②  $a^2$

③  $\sqrt{3}a^2$

④  $3a^2$

⑤  $3\sqrt{3}a^2$



해설

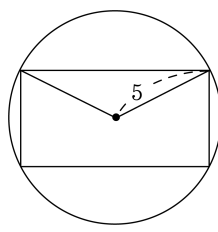
$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $5\sqrt{2}$       ③  $10\sqrt{2}$   
 ④  $20\sqrt{2}$       ⑤  $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,  
 가로와 세로의 길이를  $a$ ,  $b$  라 하면  
 $a^2 + b^2 = 100$   
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해  
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$   
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로  
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은  
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$