

1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $C < B < A$ ② $A < B < C$ ③ $A < C < B$
④ $B < A < C$ ⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A > B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B < C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C > A \end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

2. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{1+b}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여
 $(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
 a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

4. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$
④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

5. 세 수 2^{60} , 3^{40} , 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

6. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $|a| = -a$
- ② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$

$|a||b| \geq ab$, $|b||c| \geq bc$, $|c||a| \geq ca$

$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$ ($\because |a||b| \geq ab$)

$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

7. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, b > 25$

② $a \geq 20, b > 25$

③ $a > 20, b = 25$

④ $a = 20, b > 25$

⑤ $a = 20, b < 25$

해설

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$(20 - a)y + 25 - b < 0$$

이것이 임의의 실수 y 에 대하여 항상 성립할 조건은

$$20 - a = 0, 25 - b < 0$$

$$\therefore a = 20, b > 25$$

8. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $-x^2 + 4x - 6 < 0$

㉡ $x^2 - 6x + 9 > 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

㉣ $a = b < 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

㉤ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$

㉣ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b \geq bx + a$

따라서 항상 성립하는 것은 ㉠, ㉡, ㉣ 의 3개이다.

9. 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

- (㉠) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (㉡) $x^2 - x + 1 > 0$
- (㉢) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (㉣) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- (㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- (㉥) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

- (㉠) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, $a = b$ 일때 등호성립)
- (㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (단, $a = b = c$ 일때 등호성립)

10. 임의의 실수 x, y 에 대하여 항상 $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + ay + b > 0$ 이 성립할 때, a 의 값과 b 의 최소 정수값의 합을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

x 에 대하여 정리하면 $x^2 + 2(y+2)x + y^2 + ay + b > 0 \cdots \textcircled{A}$

\textcircled{A} 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (4-a)y + 4 - b < 0 \cdots \textcircled{B}$$

또, \textcircled{B} 이 임의의 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로

$$4 - a = 0, 4 - b < 0$$

$$\therefore a = 4, b > 4$$

$$a = 4, b \text{의 최소정수값} = 5$$

$$\therefore a + (b \text{의 최소정수값}) = 9$$