1. A(2, 0), B(0, 2) 에서의 거리의 제곱의 합이 12 인 점 P(x, y) 의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$
② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$
③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$
④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$
⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$(\overline{\mathrm{PA}})^2 = (x-2)^2 + y^2$
$(\overline{\mathrm{PB}})^2 = x^2 + (y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2 = 12$
$\therefore\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

2. 원 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$의 중심이 (a,b), 반지름의 길이가 r일 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y-3)^2=16$
따라서, 중심은 $(2,3)$
반지름의 길이가 4 이므로
$a=2,\ b=3,\ r=4$
$\therefore\ a+b+r=9$

3. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 이다. $a+b+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$ 이다.
(지름의 길이) $= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

4. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ············㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ············㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$ 일 때 $b = 4$, $a = 10$ 일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

5. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2+y^2=1,\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
㉡ $(x+1)^2+y^2=2,\quad x^2+(y+3)^2=2$
㉢ $x^2+y^2=2,\quad (x+1)^2+(y-1)^2=8$
㉣ $x^2+y^2=4,\quad (x-3)^2+(y+4)^2=9$
㉤ $x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x+2y+4=0$

① ㉠　　② ㉠, ㉤　　③ ㉡
④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r-r'|<d<|r+r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

6. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

7. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$
② $2x-2y+3=0$
③ $2x-2y-3=0$
④ $2x+2y-3=0$
⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

8. 두 점 A$(-2,\ 2)$, B$(2,\ 2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

A$(-2,\ 2)$ B$(2,\ 2)$ 의 중점은 원의 중심이므로,

중점 $\mathrm{O} = \left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{2+2}{2}\right) = (0,\ 2)$

반지름의 길이 $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{(-2)^2+0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 $(0,\ a)$ 라고 하면

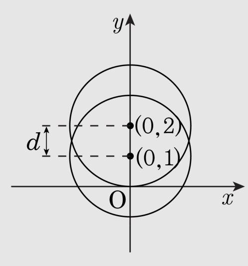
두점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 과의 거리가 각각 같으므로,

$(0-2)^2+(a-1)^2 = (0-0)^2+(a-3)^2$

$\therefore a = 1$

반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와 같으므로 $2-1=1$



9. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

10. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2},\ m > 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

③ $1 < m < 3$　　④ $m < 1,\ m > 3$

⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면

$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+1}}$ 이다.

원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2+1}$$
$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$
$$\Rightarrow m^2 > 8$$

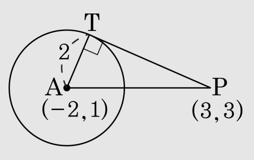
$\therefore\ m < -2\sqrt{2}$ 또는 $m > 2\sqrt{2}$

11. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (−2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{PT}=5$

12. $x^2 + y^2 = 5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1, 2, 4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$
② $y = -2x + 5$
③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$
④ $y = -2x - 5$
⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\therefore\ c = \pm 5$

제 $1, 2, 4$사분면을 지나야 하므로

$\therefore\ c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$

13. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

14. 평행이동 $T:(x,\ y)\rightarrow(x+3,\ y+2)$ 에 의하여 점 $(-1,\ 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 3)$ ② $(4,\ 6)$ ③ $(2,\ 5)$ ④ $(3,\ 9)$ ⑤ $(5,\ 6)$

해설

평행이동 T 는 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 것이다.
구하는 점의 좌표는 $(-1+3,\ 3+2)$,
즉 $(2,\ 5)$

15. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$