

1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 의 중심이 (a, b) , 반지름의 길이가 r 일 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

따라서, 중심은 $(2, 3)$

반지름의 길이가 4 이므로

$$a = 2, b = 3, r = 4$$

$$\therefore a + b + r = 9$$

3. 지름의 양 끝점이 $(3, 0)$, $(5, 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ 이다. $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4, 1)$ 이다.

(지름의 길이) $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서

반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$$

4. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4, 4)$ 를 지나며, y 축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

② $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

③ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

④ $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$

⑤ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로

$$b = a + 2 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 $(4, 4)$ 를 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - b)^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } (4 - a)^2 + (4 - a - 2)^2 = a^2$$

$$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore a = 2, 10$$

$$\therefore a = 2 \text{ 일 때 } b = 4, a = 10 \text{ 일 때 } b = 12$$

따라서 구하는 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4,$$

$$(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$$

5. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

㉡ $(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y+3)^2 = 2$

㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$

㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

① ㉠

② ㉠, ㉤

③ ㉡

④ ㉢, ㉣

⑤ ㉣, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
 $|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.

㉡ 만나지 않는다.

㉢ 내접한다.

㉣ 외접한다.

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을 지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

7. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

8. 두 점 A(-2, 2), B(2, 2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 (2, 1), (0, 3)을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

A(-2, 2) B(2, 2)의 중점은 원의 중심이므로,

$$\text{중점 } O = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (0, 2)$$

반지름의 길이 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 (0, a) 라고 하면

두점 (2, 1), (0, 3) 과의 거리가 각각 같

으므로,

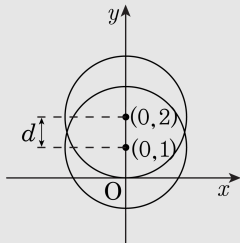
$$(0-2)^2 + (a-1)^2 = (0-0)^2 + (a-3)^2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{반지름: } \sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$$

공통외접선의 길이 d는 중심간의 거리와

같으므로 $2 - 1 = 1$



9. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

10. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2}, m > 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

③ $1 < m < 3$

④ $m < 1, m > 3$

⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ 이다.}$$

원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$$\therefore m < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } m > 2\sqrt{2}$$

11. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5

② $\sqrt{26}$

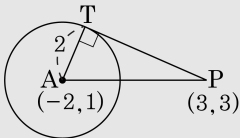
③ 6

④ $\sqrt{37}$

⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 $(-2, 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$

12. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x - 5$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore c = \pm 5$$

제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로

$$\therefore c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$$

13. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인

접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식

$x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{\text{(가)}} = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$D = 0$ 에서

$$k = \pm \boxed{\text{(나)}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \boxed{\text{(나)}}$$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$

④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에

대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,

$$\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$$

원과 직선이 접하므로 $D = 0$,

$$\text{즉 } r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore \text{(가)} : k^2 - r^2, \text{(나)} : r\sqrt{m^2 + 1}$$

14. 평행이동 $T : (x, y) \rightarrow (x + 3, y + 2)$ 에 의하여 점 $(-1, 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 3)$

② $(4, 6)$

③ $(2, 5)$

④ $(3, 9)$

⑤ $(5, 6)$

해설

평행이동 T 는 x 축의 방향으로 3 만큼,
 y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 것이다.
구하는 점의 좌표는 $(-1 + 3, 3 + 2)$,
즉 $(2, 5)$

15. 직선 $2x + 3y + 7 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x + 3y + 2 = 0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선 $2x + 3y + 7 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,

$$2(x + 2) + 3(y - k) + 7 = 0$$

$$\therefore 2x + 3y + 11 - 3k = 0$$

이 직선이 $2x + 3y + 2 = 0$ 과 일치하므로

$$11 - 3k = 2 \quad \therefore k = 3$$