1. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, a_3+a_4의 값은?

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{6},\ a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}(n=1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1}=3,\ \frac{1}{a_2}=6$이므로

$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 3=3n,\ a_n=\frac{1}{3n}$

$a_3=\frac{1}{9},\ a_4=\frac{1}{12}\quad\therefore\ a_3+a_4=\frac{7}{36}$

2. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29　② 31　③ 33　④ 35　⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로

a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

5. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

7. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

8. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하면?

① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이고,

$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$이므로

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$

$$= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$$

9. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}(n \geq 2)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 2014항은?

① 5 ② 3 ③ -2 ④ -3 ⑤ -5

해설

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$

$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$

$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$

$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$

$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2$가 계속해서 반복된다.

이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$이므로

$a_{2014} = a_4 = -3$

10. $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{3}{7}$, $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

11. $a_1 = -10,\ a_{n+1} = a_n + n^2\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① 210 ② 275 ③ 310 ④ 375 ⑤ 425

해설

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 꼴이면 $f(n)$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열임을 이용한다.

$a_{n+1} = a_n + n^2,\ a_{n+1} - a_n = n^2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $b_n = n^2$

$\therefore a_{11} = -10 + \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= -10 + \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 375$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$를 10으로 나눈 나머지는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 2013$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \cdots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,$
$a_4 = 24,\ a_5 = 120,\ a_6 = 6a_5,$
$a_7 = 7a_6,\ \cdots$

따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$을 10으로 나눈 나머지는 3이다.

14. $a_1 = 110$인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \quad \therefore\ a_{10} = 110 \times$$

$$= 110 \times \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\frac{2}{110} = 2$$

15. 다음과 같은 관계식으로 정의된 수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

① $2^{n-2} + \frac{2}{5}$ ② $2^{n-2} + 3$ ③ $2^n + 1$

④ $2^{n+1} - 1$ ⑤ $2^{n+2} - 5$

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 1$을 변형하면

$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$이므로

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 4$이고,

공비가 2인 등비수열이 된다.

따라서 $a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

그러므로 $a_n = 2^{n+1} - 1$

16. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$
⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=0+\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

17. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

I. $a_1 = 3$ II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

해설

$a_1 = 3$

$a_2 = 2$

$a_3 = 4$

$a_4 = 2$

$\vdots$

즉, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$

18. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

19. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 는? (단, $p,\ q$는 서로소인 정수)

① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12} ④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

해설

(i) $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ 의 양변에 1을 더하면

$$a_{n+1} + 1 = \frac{3a_n + 3}{a_n + 2} = \frac{3(a_n + 1)}{a_n + 2} \cdots ㉠$$

(ii) $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ 의 양변에서 1을 빼면

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{a_n + 1}{a_n - 1}$ 은 첫째항이 3이고,

공비가 3인 등비수열이므로

$$\left\{\frac{a_n + 1}{a_n - 1}\right\} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore\ a_n = \frac{3^n + 1}{3^n - 1}$$

$a_{10} = \dfrac{3^{10} + 1}{3^{10} - 1}$ 인데 분자, 분모는 모두 짝수이고 두 수의 차는 2 이므로 최대공약수가 2이다.

$p = \dfrac{3^{10} - 1}{2},\ q = \dfrac{3^{10} + 1}{2}$ ($\therefore\ p,\ q$는 서로소)

$$\therefore\ p + q = 3^{10}$$

20. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$　② $a_{101} - a_{50}$　③ $a_{101} - a_{51}$
④ $a_{102} - a_{51}$　⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

(i)
$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_3 - a_2 \\
a_2 &= a_4 - a_3 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_{100}} &\underline{= a_{102} - a_{101}} \\
\sum_{k=1}^{100} a_k &= a_{102} - a_2
\end{aligned}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_3 - a_2 \\
a_2 &= a_4 - a_3 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_{50}} &\underline{= a_{52} - a_{51}} \\
\sum_{k=1}^{50} a_k &= a_{52} - a_2
\end{aligned}
$$

(i), (ii) 에 의하여

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=51}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\
&= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\
&= a_{102} - a_{52}
\end{aligned}
$$