1. 다항식 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

해설

$f(2) = 24 - 16 + 4 - k = 0$

$\therefore\ k = 12$

2. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 연립방정식 $ax+by=8$, $2ax-by=-2$의 근이 $x=1$, $y=2$일 때, a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-3$　② $a=3,\ b=2$

③ $a=2,\ b=-3$　④ $a=2,\ b=3$

⑤ $a=-3,\ b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$

근이 $x=1, y=2$이므로

$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=3$

4. 연립방정식 $\begin{cases} px+y=1 \\ x+py=1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때의 p값으로 알맞은 것은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -2

해설

$ax+by=c,\ dx+ey=f$ 일때,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\neq\frac{c}{f}$ 이면 해가 없음,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$ 이면 해가 무수히 많다.

$p=\frac{1}{p}\neq 1$

$\therefore p=-1$

5. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$
$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$
가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$
$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

6. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

7. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\ \ \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

8. 연립 방정식 $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=5 \\ z-x=2 \end{cases}$ 에서 $x+y+z$를 구하면?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

세 다항식을 더하면, $2z=12$, $z=6$
$y+6=5$, $y=-1$
$x+1=5$, $x=4$
$\therefore\ x+y+z=4-1+6=9$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$ 을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

11. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

12. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

13. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii)에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

14. 삼차방정식 $x^3+ax+16=0$이 중근 α와 다른 실근 β를 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -12 ② -14 ③ -16 ④ -18 ⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\alpha+\beta=0,\ \beta=-2\alpha$

$\alpha\times\alpha\times\beta=-16$에서

$-2\alpha^3=-16,\ \alpha=2,\ \beta=-4$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

일차항의 계수 $=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=a$

$\therefore\ a=-12$

15. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

16. 다음 연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \cdots\cdots ㉡ \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=3 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=\frac{1}{2}$ 또는 0.5

▷ 정답: $y=1$

▷ 정답: $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉣ − ㉠에서 $\frac{1}{z}=1, \quad \therefore z=1$

㉣ − ㉡에서 $\frac{1}{x}=2, \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

㉣ − ㉢에서 $\frac{1}{y}=1 \quad \therefore y=1$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a, y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0, x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$ 를 ②에 대입하면 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\mp1$ (복호동순)

ii) $x=-2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

18. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

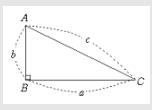
$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

19. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설



$\frac{1}{2}ab = 30,\ ab = 60$

$a + b + c = 30,\ a + b = 30 - c$

$a^2 + b^2 = c^2\ (a+b)^2 - 2ab = c^2$

$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$

$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$

$60c = 780,\ \therefore\ c = 13$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$