

1. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.

② $x + y = 10$ 이다.

③ $|-3| = -3$

④ $x = 2$ 일 때, $x - 1 > 0$

⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참
따라서 명제는 ①, ③, ④

2. 다음 중 명제가 아닌 것은?

- ① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.
- ② 설악산은 제주도에 있다.
- ③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.
- ④ $x + 1 < 0$
- ⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x 의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 원소가 4개인 집합의 부분집합의 개수는 16개이다.
- ② 원소가 3개인 집합의 진부분집합의 개수는 7개이다.
- ③ 집합 $\{3, 6, 7\}$ 과 집합 $\{4, 5, 6\}$ 는 서로소이다.
- ④ 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이다.
- ⑤ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 역이 반드시 참인 것은 아니다.

해설

- ① 부분집합의 개수 $= 2^n$ (n : 집합 원소의 개수)
- ② 진부분집합의 개수 $= 2^n - 1$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7$ (참)
- ③ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ 는 서로소
 $\therefore \{3, 6, 7\} \cap \{4, 5, 6\} \neq \emptyset$ (거짓)
- ④ (참)
- ⑤ (참)

4. 다음 중 거짓인 명제는?

- ① 직사각형은 사다리꼴이다.
- ② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.
- ③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
- ④ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다.
- ⑤ $(x - 3)(y - 5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

5. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?

- ① $2 < \sqrt{6} \leq 3$

② 2는 소수가 아니다.
- ③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$

④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$
- ⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

6. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $a < b$ 이면 $a + c > b + c$
- ② $a < b$ 이면 $a - c > b - c$
- ③ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$
- ④ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- ⑤ $ac < bc$ 이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b, a = b, a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
- ii) $a > b, b > c$ 이면 $a > c$
- iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
- iv) $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$
- v) $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$

따라서 참인 것은 ④이다.

7. 다음 중 명제 ' $x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x+y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

8. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$

② $\sim q \rightarrow p$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$
 $\therefore q \rightarrow \sim p$

9. 명제 ‘ $a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다 ’의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면 $a > b$ 이다

② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$ 이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$ 이다

④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$$

10. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설
 $A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

11. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a + b$, $a + 2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a + b < a + 2b$

② $2a + b \leq a + 2b$

③ $2a + b > a + 2b$

④ $2a + b \geq a + 2b$

⑤ $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

12. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned}\text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A\end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

13. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

14. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{이 때 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x + 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore & (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2(x+y)} \\ & (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} = \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

15. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를
바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $C < A < B$
- ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로
 A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
 $A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
 $B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
 $C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

16. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore (3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 25$$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25이다.

17. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

18. 양수 a, b 에 대하여 $\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} = \frac{1}{6} \left(\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)$$
$$\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2$$

해설

19. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

20. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값은?
- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) &= 8xy + \frac{1}{2xy} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5 \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

21. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$$

$$= 1 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \geq 5 \cdot 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 즉 $b = 2a$ 일 때 성립)

22. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때, 곱 xy 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}$ 이고

$\sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy|$ 이므로 $|xy| \leq \frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$

그러므로 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

23. $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

24. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

$$= 3 + \frac{4y}{x} + \frac{9x}{y} + 12 \geq 15 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}}$$

$$= 15 + 12$$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x} = \frac{9x}{y}$, 즉 $3x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27이다.

25. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$
 $(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$
 $\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$ 이므로
 $x + 2y$ 의 최댓값 $M = 5$, 최솟값 $m = -5$
 $\therefore M + n = 5 + (-5) = 0$

26. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$
 $= 2(x + 3y)$
 $= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

27. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로
 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

28. 다음 중 명제가 아닌 것을 모두 고르면?

- ① 무궁화 꽃은 아름답다.
- ② 한국의 수도는 서울이다.
- ③ $1 + 2 < 5$
- ④ $x + 1 = 4$
- ⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④ $x = 3$ 인 경우는 참이지만 $x \neq 3$ 인 경우는 거짓이다. 따라서 x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

29. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

- ① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.
- ② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.
- ③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.
- ④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.
- ⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 ' $p \rightarrow q$ '의 대우는 ' $\sim q \rightarrow \sim p$ '이다.
 p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

30. 명제 ‘ p 이면 q 가 아니다.’의 역인 명제의 대우를 구하면?

- ① q 가 아니면 p 이다. ② q 이면 p 가 아니다.
③ p 가 아니면 q 가 아니다. ④ p 가 아니면 q 이다.
⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \rightarrow \sim q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow \sim p \rightarrow q \Rightarrow p$ 가 아니면 q 이다.

31. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

- ① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

32. $p : x = 3$, $q : x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$
이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P \therefore$ 충분조건

33. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의
최솟값을 구하여라.

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

34. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$