1. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60　② 62　③ 64　④ 66　⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠
$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a = 5,\ d = 3$
따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n은
$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$
따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

2. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$

$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$

$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

4. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$16,\ -8,\ 4,\ -2,\cdots\cdots$

① $8(-2)^n$ ② $16(-2)^{n-1}$ ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

6. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

7. $x \geq 0$일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$를 간단히 하면?

① $x\sqrt{x}$　② $x\sqrt[4]{x}$　③ $\sqrt[8]{x}$　④ $\sqrt[8]{x^3}$　⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$$
$$= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}$$
$$= \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$$

8. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k의 값은? (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$

$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$

$20 = k + 3$

$k = 17$

9. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

10. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z라 하면 $v < w < x < y < z$이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x의 값은?

① 92° ② 108° ③ 112° ④ 121° ⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540°$이다.
또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면
d를 공차로 생각하여 $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$와 같이 표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면
$(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d) = 540°$이므로 $x = 108°$이다.

11. $a_1 = 1,\ a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{30}의 값은?

① -9　　② -6　　③ -2　　④ 3　　⑤ 5

해설

$a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$

$a_{30} = a_{15} + 2 = (a_7 - 3) + 2 = a_7 - 1$

$= (a_3 - 3) - 1 = a_3 - 4 = (a_1 - 3) - 4$

$= a_1 - 7 = -6$

12. $a_1 = p,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{a_n + 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의되는 수열이 있다. 다음 중 임의의 양수 p에 대하여 $a_n = p$가 되도록 하는 n의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$a_1 = p,\ a_2 = -\dfrac{1}{p+1},$

$a_3 = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{p+1} + 1} = -\dfrac{p+1}{p},$

$a_4 = \dfrac{-1}{-\dfrac{p+1}{p} + 1} = p,\ a_5 = -\dfrac{1}{p+1}, \cdots$

$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \cdots = a_{22} = a_{25} = \cdots = p$

즉, $n = 3k + 1(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$이면 $a_n = p$이다.

$\therefore a_{22} = p$

13. $\log_5 250 = n + \alpha$(n은 정수, $0 \le a < 1$)라고 할 때, $n \times 25^{\alpha}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로
$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$
$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고
소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \dfrac{250}{125} = \log_5 2$
따라서 $25^{\alpha} = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^{α} 의 값과 정수부분 n 의 곱은
$3 \times 4 = 12$ 이다.

14. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a\sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le A < 3$
② $\frac{3}{2} < A \le 3$
③ $2\sqrt{2} \le A < 3\sqrt{3}$
④ $3 \le A < \frac{9}{2}$
⑤ $3 < A \le \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \le \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \le A < \frac{9}{2}$

15. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 두 상용로그 $\log 60^2$ 과 $\log \frac{1}{60}$ 의 소수 부분의 차는?

① 0 ② 0.1761 ③ 0.3010
④ 0.3343 ⑤ 0.7781

해설

$\log 60^2 = 2\log 60$
$= 2 \times (1 + \log 2 + \log 3)$
$= 2 \times (1 + 0.3010 + 0.4771)$
$= 3.5562$
$\log 60^2$ 의 정수 부분은 3 이고 소수 부분은 0.5562 이다.

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{60} &= -\log 60 = -1 - (\log 2 + \log 3)\\ &= -1 - (0.3010 + 0.4771)\\ &= -1 - 0.7781\\ &= (-2) + 0.2219\end{aligned}$$

$\log \frac{1}{60}$ 의 정수 부분은 -2이고 소수 부분은 0.2219 이다.
따라서 두 상용로그 $\log 60^2$ 과 $\log \frac{1}{60}$ 의 소수 부분의 차는
$0.5562 - 0.2219 = 0.3343$

16. 다음 <보기> 중 $\log A$와 소수 부분이 항상 같은 것으로 묶어 놓은 것은? (단, 로그는 상용로그)

보기

㉠ $10\log A$　　㉡ $10-\log A$　　㉢ $\log 10A$

㉣ $(\log A)-10$　　㉤ $\log \frac{A}{10}$

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉡, ㉢, ㉣　　③ ㉢, ㉣, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤　　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

소수 부분이 같으려면
진수의 숫자의 배열이 같아야하므로
㉢, ㉣, ㉤

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$\alpha_n+\beta_n=-4$

$\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

18. 그림과 같이 자연수 k에 대하여 $[\log_{k+1} x] = 1$을 만족시키는 자연수 x를 k행에 차례로 배열할 때, k행에 배열된 자연수의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

1행	2	3				
2행	3	4	5	6	7	8
⋮	⋮		⋮		⋮	
10행	11	12	13	$\cdots$		

▶ 답 :

▷ 정답 : 440

해설

$1 \le \log_{k+1} x < 2$

$k+1 \le x < (k+1)^2$이므로

k행에 배열된 자연수는 $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k^2+2k$이므로

자연수의 개수 a_k는 $a_k = (k^2+2k) - k = k^2 + k$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$= \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 440$

19. 수열 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$ 에 대하여 제100항은?

① $\frac{6}{13}$ ② $\frac{7}{13}$ ③ $\frac{6}{14}$ ④ $\frac{7}{14}$ ⑤ $\frac{6}{15}$

해설

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \cdots$ 과 같이 군으로 묶으면

각 군의 항수는 $1, 2, 3, \cdots$ 이다.

즉, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \le 100$ 에서

$n = 13$ 일 때 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제13군까지의 항의 개수가 91 이다.

따라서 제100항은 제14군의 9번째 수이다.

그러므로 제100항의 값은 $\frac{14-8}{14} = \frac{6}{14}$

20. 오른쪽 그림과 같이 가운데 1을 중심으로 사각형의 안쪽에서 바깥쪽으로, 맨 아래 왼쪽부터 시계반대 방향으로 숫자를 써 나가는 판이 있다. 이 같은 규칙으로 숫자를 배열할 때, 81을 둘러싸고 있는 8개의 칸에 적힌 수들의 합은?

$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\iddots$
$\cdots$	22	21	20	19	18	$\cdots$
$\cdots$	23	8	7	6	17	$\cdots$
$\cdots$	24	9	1	5	16	$\cdots$
$\cdots$	25	2	3	4	15	$\cdots$
$\cdots$	10	11	12	13	14	$\cdots$
$\iddots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$

① 587 ② 601 ③ 616 ④ 632 ⑤ 648

해설

1을 중심으로 같은 둘레에 있는 수들을 하나의 군으로 보면 각 군의 끝항은
$(2n-1)^2(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$이 된다.
따라서 81을 둘러싸고 있는
칸을 모두 채우고 그 수들의 합을 구하면

118	79	48	25
119	80	49	10
120	81	26	27
121	50	51	52

$119+51+121+49+80+50+120+26=616$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의 될 때, a_9의 값은?

① 2^{15} ② 2^{16} ③ $3 \cdot 2^{15}$
④ $3 \cdot 2^{16}$ ⑤ $3 \cdot 2^{17}$

해설

$a_1 = 4$
$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 4$
$a_3 = 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$
$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$
$\vdots$
$a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 2^{16}$

22. 16 의 세제곱근 중 실수인 것을 a, -2 의 세제곱근 중에 실수인 것을 b 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$ ② -2 ③ 3 ④ $-\sqrt[3]{4}$ ⑤ 8

해설

16 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{16}$ 이므로
$a = \sqrt[3]{16}$
-2 의 세제곱근 중에 실수인 것은 $-\sqrt[3]{2}$ 이므로
$b = -\sqrt[3]{2}$
따라서, 구하는 값은
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$$

23. 1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S 라 하자. 이러한 S 의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① 268　② 278　③ 288　④ 298　⑤ 308

해설

a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 은 공차가 2인 등차수열

$a_1 = 1 + 3 + \cdots + 19 = \dfrac{10 \times 20}{2} = 100$

$$\begin{aligned} a_{100} &= 100 + (100 - 1) \times 2 \\ &= 100 + 198 = 298 \end{aligned}$$

24. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b는 서로소) 이다. 이때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로
$k = 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}, \cdots$
따라서, k의 최소값은 2^{30}이므로 $p = 2^{30}$이다.
$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$
$\therefore a + b = 17$

25. 자연수 n에 대하여 상용로그 $\log n$의 정수 부분을 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(499)+f(500)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 890

해설

(i) $1 \le n < 10$일 때, $f(n)=0$
(ii) $10 \le n < 100$일 때, $f(n)=1$
(iii) $100 \le n < 500$일 때, $f(n)=2$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(499)+f(500)$
$=0\times 9+1\times 90+2\times 400$
$=890$