

1. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60

② 62

③ 64

④ 66

⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 11 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_9 = a + 8d = 29 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 5, d = 3$$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$$

따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

2. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64

② 80

③ 92

④ 100

⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

4. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$$16, -8, 4, -2, \dots$$

① $8(-2)^n$

② $16(-2)^{n-1}$

③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n =$

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

5. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

6. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{(\omega^2)^{36} - 1\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

7. $x \geq 0$ 일 때, $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$ 를 간단히 하면?

① $x \sqrt{x}$

② $x \sqrt[4]{x}$

③ $\sqrt[8]{x}$

④ $\sqrt[8]{x^3}$

⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x \sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

8. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

$$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$$

$$20 = k + 3$$

$$k = 17$$

9. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$$\log_2(\log_8 x) = -1 \text{ 에서}$$

$$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

10. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z 라 하면 $v < w < x < y < z$ 이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x 의 값은?

① 92°

② 108°

③ 112°

④ 121°

⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540^\circ$ 이다.

또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면

d 를 공차로 생각하여 $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ 와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면

$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 540^\circ$ 이므로 $x = 108^\circ$
이다.

11. $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n + 2$, $a_{2n+1} = a_n - 3$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{30} 의 값은?

① -9

② -6

③ -2

④ 3

⑤ 5

해설

$$a_{2n} = a_n + 2, \quad a_{2n+1} = a_n - 3$$

$$a_{30} = a_{15} + 2 = (a_7 - 3) + 2 = a_7 - 1$$

$$= (a_3 - 3) - 1 = a_3 - 4 = (a_1 - 3) - 4$$

$$= a_1 - 7 = -6$$

12. $a_1 = p$, $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의되는 수열이 있다.
다음 중 임의의 양수 p 에 대하여 $a_n = p$ 가 되도록 하는 n 의 값은?

① 20

② 21

③ 22

④ 23

⑤ 24

해설

$$a_1 = p, a_2 = -\frac{1}{p+1},$$

$$a_3 = \frac{-1}{-\frac{1}{p+1} + 1} = -\frac{p+1}{p},$$

$$a_4 = \frac{-1}{-\frac{p+1}{p} + 1} = p, a_5 = -\frac{1}{p+1}, \dots$$

$$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{22} = a_{25} = \dots = p$$

즉, $n = 3k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)이면 $a_n = p$ 이다.

$$\therefore a_{22} = p$$

13. $\log_5 250 = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 라고 할 때, $n \times 25^\alpha$ 의 값은?

▶ 답:

▶ 정답: 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로

$$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$$

$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고

$$\text{소수부분은 } \alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$$

따라서 $25^\alpha = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^α 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

14. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

15. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 두 상용로그 $\log 60^2$ 과 $\log \frac{1}{60}$ 의 소수 부분의 차는?

① 0

② 0.1761

③ 0.3010

④ 0.3343

⑤ 0.7781

해설

$$\log 60^2 = 2 \log 60$$

$$= 2 \times (1 + \log 2 + \log 3)$$

$$= 2 \times (1 + 0.3010 + 0.4771)$$

$$= 3.5562$$

$\log 60^2$ 의 정수 부분은 3 이고 소수 부분은 0.5562 이다.

$$\log \frac{1}{60} = -\log 60 = -1 - (\log 2 + \log 3)$$

$$= -1 - (0.3010 + 0.4771)$$

$$= -1 - 0.7781$$

$$= (-2) + 0.2219$$

$\log \frac{1}{60}$ 의 정수 부분은 -2 이고 소수 부분은 0.2219 이다.

따라서 두 상용로그 $\log 60^2$ 과 $\log \frac{1}{60}$ 의 소수 부분의 차는

$$0.5562 - 0.2219 = 0.3343$$

16. 다음 <보기> 중 $\log A$ 와 소수 부분이 항상 같은 것으로 묶어 놓은 것은? (단, 로그는 상용로그)

보기

㉠ $10 \log A$

㉡ $10 - \log A$

㉢ $\log 10A$

㉤ $(\log A) - 10$

㉥ $\log \frac{A}{10}$

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉡, ㉢, ㉤

③ ㉢, ㉤, ㉥

④ ㉠, ㉡, ㉥

⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

소수 부분이 같으려면

진수의 숫자의 배열이 같아야하므로

㉢, ㉤, ㉥

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

① $\frac{11}{21}$

② $\frac{20}{21}$

③ $\frac{31}{21}$

④ $\frac{40}{21}$

⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\alpha_n + \beta_n = -4$$

$$\alpha_n \beta_n = -(2n-1)(2n+1)$$

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21}$$

18. 그림과 같이 자연수 k 에 대하여 $\lceil \log_{k+1} x \rceil = 1$ 을 만족시키는 자연수 x 를 k 행에 차례로 배열할 때, k 행에 배열된 자연수의 개수를 a_k 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하여라. (단, $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

1행			2		3									
2행			3		4		5		6		7		8	
			⋮				⋮				⋮			
10행	11		12		13		...							

▶ 답 :

▷ 정답 : 440

해설

$$1 \leq \log_{k+1} x < 2$$

$k+1 \leq x < (k+1)^2$ 이므로

k 행에 배열된 자연수는 $k+1, k+2, \dots, k^2+2k$ 이므로
자연수의 개수 a_k 는 $a_k = (k^2+2k) - k + 1 = k^2 + k + 1$ 이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k + 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 10 = 440$$

19. 수열 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ 에 대하여 제100 항은?

① $\frac{6}{13}$

② $\frac{7}{13}$

③ $\frac{6}{14}$

④ $\frac{7}{14}$

⑤ $\frac{6}{15}$

해설

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \dots$ 과 같이 군으로 묶으면
각 군의 항수는 1, 2, 3, ... 이다.

즉, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 100$ 에서

$n = 13$ 일 때 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제13군까지의 항의 개수가 91
이다.

따라서 제100 항은 제14군의 9 번째 수이다.

그러므로 제100 항의 값은 $\frac{14-8}{14} = \frac{6}{14}$

20. 오른쪽 그림과 같이 가운데 1을 중심으로 사각형의 안쪽에서 바깥쪽으로, 맨 아래 왼쪽부터 시계반대 방향으로 숫자를 써 나가는 판이 있다. 이 같은 규칙으로 숫자를 배열할 때, 81을 둘러싸고 있는 8개의 칸에 적힌 수들의 합은?

...	...	...	...	...	...	...
...	22	21	20	19	18	...
...	23	8	7	6	17	...
...	24	9	1	5	16	...
...	25	2	3	4	15	...
...	10	11	12	13	14	...
...	...	...	...	...	...	...

① 587

② 601

③ 616

④ 632

⑤ 648

해설

1을 중심으로 같은 둘레에 있는 수들을 하나의 군으로 보면 각 군의 끝항은

$(2n-1)^2 (n=1, 2, 3, \dots)$ 이 된다.

따라서 81을 둘러싸고 있는

칸을 모두 채우고 그 수들의 합을 구하면

118	79	48	25
119	80	49	10
120	81	26	27
121	50	51	52

$$119 + 51 + 121 + 49 + 80 + 50 + 120 + 26 = 616$$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)
으로 정의 될 때, a_9 의 값은?

① 2^{15}

② 2^{16}

③ $3 \cdot 2^{15}$

④ $3 \cdot 2^{16}$

⑤ $3 \cdot 2^{17}$

해설

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 4$$

$$a_3 = 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$$

$$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$$

$$\vdots$$

$$a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 2^{16}$$

22. 16의 세제곱근 중 실수인 것을 a , -2 의 세제곱근 중에 실수인 것을 b 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$

② -2

③ 3

④ $-\sqrt[3]{4}$

⑤ 8

해설

16의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{16}$ 이므로

$$a = \sqrt[3]{16}$$

-2 의 세제곱근 중에 실수인 것은 $-\sqrt[3]{2}$ 이므로

$$b = -\sqrt[3]{2}$$

따라서, 구하는 값은

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$$

23. 1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S 라 하자. 이러한 S 의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① 268

② 278

③ 288

④ 298

⑤ 308

해설

$a_1, a_2, a_3, \dots$ 은 공차가 2인 등차수열

$$a_1 = 1 + 3 + \dots + 19 = \frac{10 \times 20}{2} = 100$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= 100 + (100 - 1) \times 2 \\ &= 100 + 198 = 298 \end{aligned}$$

24. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2 = b^3 = c^5 = k$ 를 만족하는 k 의 값들 중 최소인 수를 p 라 할 때, $\log_{16} p = \frac{b}{a}$ (단, a, b 는 서로소)이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

2, 3, 5의 최소공배수가 30이므로

$$k = 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}, \dots$$

따라서, k 의 최소값은 2^{30} 이므로 $p = 2^{30}$ 이다.

$$\log_{16} 2^{30} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore a + b = 17$$

25. 자연수 n 에 대하여 상용로그 $\log n$ 의 정수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(499) + f(500)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 890

해설

(i) $1 \leq n < 10$ 일 때, $f(n) = 0$

(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때, $f(n) = 1$

(iii) $100 \leq n < 500$ 일 때, $f(n) = 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(499) + f(500) \\ &= 0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 400 \\ &= 890 \end{aligned}$$