

1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

$$= 3 + \frac{4y}{x} + \frac{9x}{y} + 12 \geq 15 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}}$$

$$= 15 + 12$$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x} = \frac{9x}{y}$, 즉 $3x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27이다.

2. 두 집합 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 4개

④ 8개

⑤ 16개

해설

집합 X 의 개수는 원소 1, 2를 포함하는 집합 B 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

3. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

4. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x - y + 4z)^2$$

$$18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

5. 다음 중 집합 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 진부분집합이 아닌 것을 모두 골라라.

㉠ $\emptyset$

㉡ $\{c\}$

㉢ $\{a, g\}$

㉣ $\{a, c, e\}$

㉤ $\{a, b, d, e\}$

㉥ $\{a, b, c, d, e\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉥

해설

$\{a, b, c, d, e\}$ 의 진부분집합을 모두 구하면
 $\{a, b, c, d, e\}$ 를 제외한 모든 부분집합이다.

㉢ $\{a, g\}$ 에서 원소 g 는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$ 에 속하지 않으므로
진부분집합이 아니다.

㉥ $\{a, b, c, d, e\}$ 은 자기 자신이므로 진부분집합이 아니다.

6. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow r$

② $\sim q \rightarrow p$

③ $p \rightarrow \sim q$

④ $r \rightarrow q$

⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

$$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$$

$$\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$$

$$\therefore p \rightarrow q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r(T)$$

7. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 54 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 이기 위한 자연수 n 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

n 은 54를 뺀 54의 약수이므로 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27이다. 따라서 7개이다.