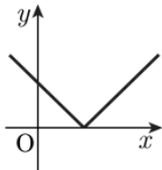
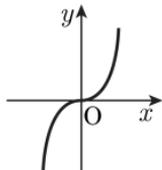


1. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

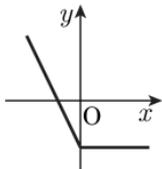
①



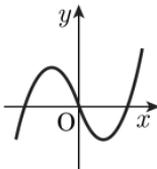
②



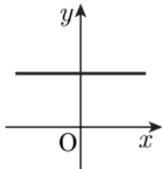
③



④



⑤

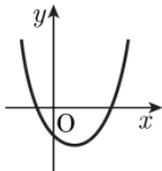


해설

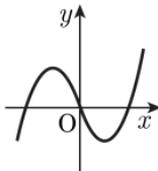
①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

2. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

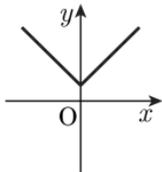
①



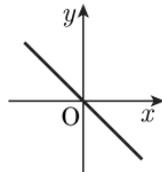
②



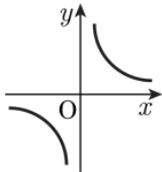
③



④



⑤



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.

일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.

⑤ 번은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

3. 함수 $y = x - 2$ 의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$

② $y = x + 2$

③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$ 를 x 에 관해서 풀면

$$x = y + 2$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x + 2$

4. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$y = -x - 1 \text{에서 } x = -y - 1$$

여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$

따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로

$$ab = 1$$

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

6. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

7. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,

(정의역)=(공역)이므로

(정의역)=(치역)이 되어야 한다.

즉, $f(k) = k$

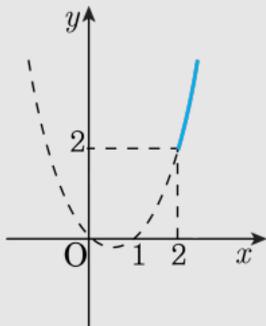
$\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$

(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로

$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.

(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.

$\therefore k = 2$



8. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

해설

9. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

10. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 3가지

▷ 정답: 3가지

해설

함수 f 가 상수함수인 경우는

$$f(1) = f(2) = f(3) = a$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = b$$

$f(1) = f(2) = f(3) = c$ 의 3가지이다

11. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $(f^{-1})^{-1} = f$

② $g \circ f \neq f \circ g$

③ $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

④ $f \circ f^{-1} = I$

⑤ $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$$

즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

12. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$

③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

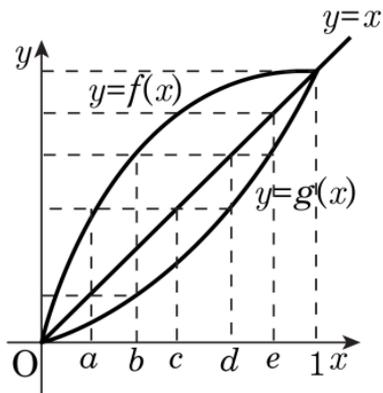
⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이어야 한다.

④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

13. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은 얼마인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$ 를 이용하여 함수값을 구한다.

$f^{-1}(d) = x$ 라 하면,

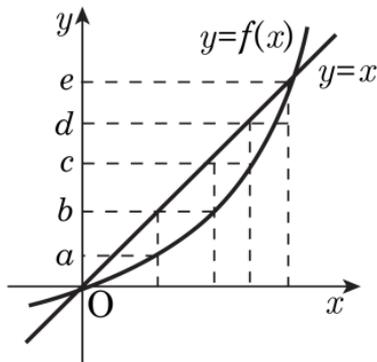
$$f(x) = d \quad \therefore x = b$$

$$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$$

$$= (f \circ g)(f^{-1}(d))$$

$$= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$$

14. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \cdot f)^{-1}(b)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

해설

$$(f \cdot f)^{-1}(b) = (f^{-1} \cdot f^{-1})(b)$$

$$= f^{-1}(f^{-1}(b))$$

$$f^{-1}(b) = k \text{라고 하면, } f(k) = b$$

$$\therefore k = c$$

$$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$$\text{또, } f^{-1}(c) = t \text{라고 하면, } f(t) = c$$

$$\therefore t = d$$

$$\therefore (f \cdot f)^{-1}(b) = d$$

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x+2) = f(x+1)$ 로 정의될 때, $g(0)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$g(x+2) = f(x+1)$ 에서 $g(0)$ 은 $x = -2$ 에서의 값이므로 $f(-1)$ 이다.

따라서 $g(0) = f(-1) = 3$

16. 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수 f 가 다음 두 조건 I, II를 만족한다.

$$\text{I. } f(2n) = f(n)(n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{II. } f(2n + 1) = n(n = 0, 1, 2, \dots)$$

이 때, $f(100)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f(100) &= f(2 \cdot 50) = f(50) = f(2 \cdot 25) = f(25) \\ &= f(2 \cdot 12 + 1) = 12 \end{aligned}$$

17. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

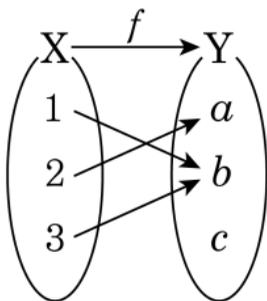
$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

18. 아래 그림은 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다. f 의 정의역, 공역, 치역을 순서대로 나열한 것은?



- ① $\{a, b, c\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$ ② $\{a, b, c\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}$
③ $\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{a, b\}$ ④ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$
⑤ $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}$

해설

19. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0), 2f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$$-f(2) - f(-1) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(-1) = -3$$

$$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$$

$$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$$

20. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 x, y 에 대하여

$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

\therefore 참

② $x = 2, y = 3$ 을 대입하면

$$f(6) = f(2) + f(3)$$

\therefore 참

③ $x = x, y = x$ 를 대입하면

$$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$$\therefore f(x^2) \neq f(2x)$$

\therefore 거짓

④ $x = x, y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

① 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

\therefore 참

⑤ $x = 4, y = 2$ 를 대입하면,

$$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots \textcircled{\Gamma}$$

또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,

$$f(4) = f(2) + f(2) \cdots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}$ 에서 $f(8) = 3f(2)$

\therefore 참

21. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x + 17$

② $-3x - 13$

③ $-3x + 13$

④ $-3x$

⑤ $-5x + 10$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x)$$

$$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$f(x) = 2x - 5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

$$\frac{y+5}{2} = x, x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2}$$

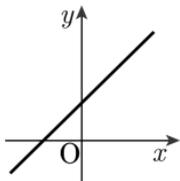
$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

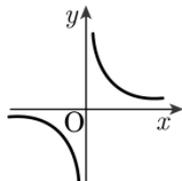
$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = -6 \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \right) + 2 = -3x - 13$$

22. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

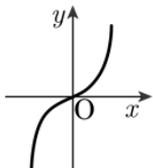
①



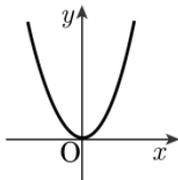
②



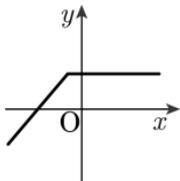
③



④



⑤



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면

함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

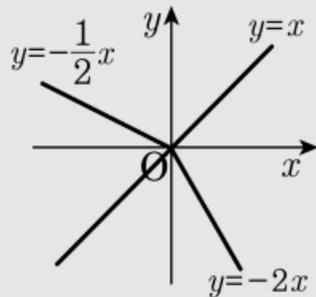
23. 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x & (x \geq 0) \\ ax & (x < 0) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f^{-1}(x) = f(x)$

를 만족할 때, 상수 a 의 값은? (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

- ① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$f^{-1}(x) = f(x)$ 이려면 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다. 직선 $y = x$ 에 대하여 직선 $y = -2x$ 와 대칭인 직선의 방정식은 $x = -2y$ 즉, $y = -\frac{1}{2}x$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.



24. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 12개

⑤ 16개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f: A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이려면

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2개,

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1개이다.

따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

25. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

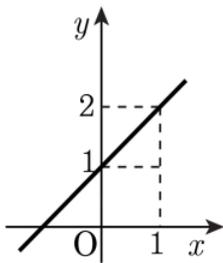
해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면
 -1 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지.

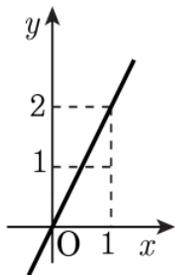
0 이 대응할 수 있는 원소는
 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,
즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

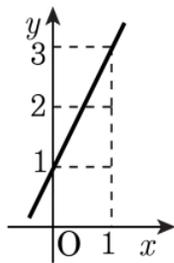
26. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



가



나



다

다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

- ① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

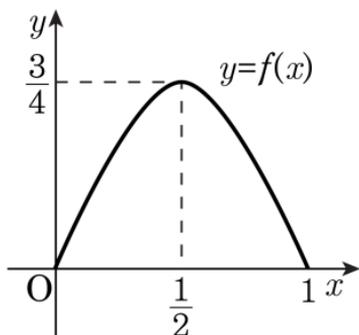
그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $w(x) = 2x + 1$ 이다.

$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로

$\therefore w = f \circ g$

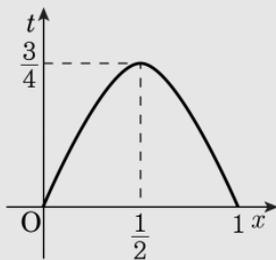
27. 다음 그림은 함수 $f(x) = 3x(1-x)$ 의 그래프의 일부이다. $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = f(f(x))$ 의 치역은?



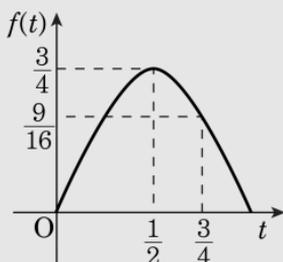
- ① $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\}$ ② $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{9}{16}\}$ ④ $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\}$
 ⑤ $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$

해설

$t = f(x) = 3x(1-x)$ 라 놓으면 아래 그림에서



$0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다. $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ 일 때, $y = f(t)$ 라 놓으면



$0 \leq y \leq \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다.

따라서, $y = f(f(x))$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\}$ 이다.