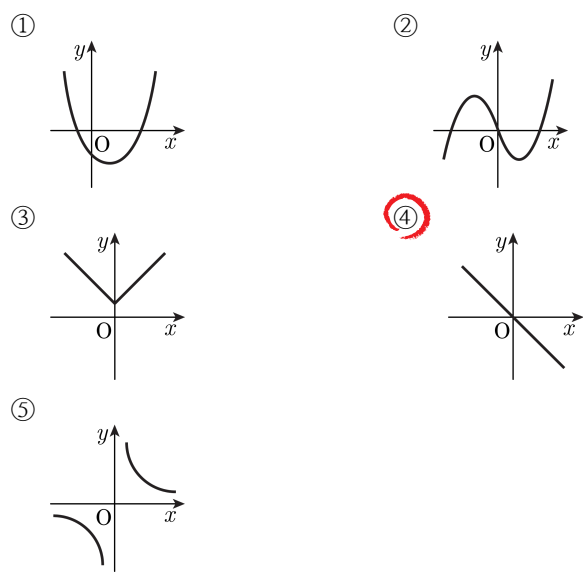


1. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

2. 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가? (단 a, b 는 실수)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 의 역함수는

$f(x) = ax + b$ 이다.

$y = \frac{1}{3}x + 2$ 로 놓고 x, y 를 서로 바꾸면

$x = \frac{1}{3}y + 2, y = 3x - 6$

$a = 3, b = -6$

$\therefore a + b = -3$

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

4. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

5. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하면?

- ① 6 개 ② 8 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

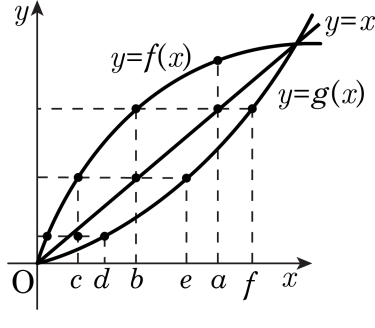
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

6. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?
- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
 - ② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$
 - ③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.
 - ④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.
 - ⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.
④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

7. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \ominus$ 이고
 $f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$
 $\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \ominus$
 $f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$
 $\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \ominus$
 $g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$
 $\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \omin�$
 $\omin�, \omin�, \omin�, \omin�$ 에서
 $(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
 $= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$
 $= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x + 1$ 로 정의될 때, 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9 \text{ 이므로}$$

함수 f 의 치역은 $\{3, 5, 7, 9\}$

따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

9. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 에서 함수 f 를 $f(x) = (x^2 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하고
 집합 $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ 에서 함수 g 를 $g(x) = (x^2 \text{을 } 8 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하자.
 두 함수 f, g 의 치역을 각각 P, Q 라고 할 때, 집합 $P \cup Q$ 는?

- ① $\{0, 1\}$
 ② $\{0, 4\}$
 ③ $\{0, 1, 4\}$
- ④ $\{0, 2, 4\}$
 ⑤ $\{1, 2, 4\}$

해설

(i) 집합 A 의 원소 x 를 $x = 2k - 1$
 (단, $k = 1, 2, 3, \dots$)로 놓으면
 $x^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$ 이므로 x^2 을 4로 나눈 나머지는 1이다.
 $\therefore P = \{1\}$

(ii) 집합 B 의 원소 x 중 0, 4, 8, 12, $\dots$ 은 $x = 4k$ (단, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$)로 나타내고
 2, 6, 10, $\dots$ 은 $x = 4k - 2$
 (단, $k = 1, 2, 3, \dots$)로 놓자.
 먼저 $x = 4k$ 일 때,
 $x^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$ 이므로
 x^2 을 8로 나눈 나머지는 0이다.
 또, $x = 4k - 2$ 일 때,
 $x^2 = (4k - 2)^2$
 $= 16k^2 - 16k + 4$
 $= 8(2k^2 - 2k) + 4$ 이므로
 x^2 을 8로 나눈 나머지는 4이다.
 $\therefore Q = \{0, 4\}$

(i), (ii)로부터 $P \cup Q = \{0, 1, 4\}$

10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x \text{는 무리수}) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때, } (g \circ$$

$f)(\pi)$ 의 값은 얼마인가?.

① 0

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 1

⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

11. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x + 17$

② $-3x - 13$

③ $-3x + 13$

④ $-3x$

⑤ $-5x + 10$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x)$$

$$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$f(x) = 2x - 5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

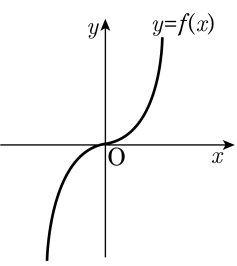
$$\frac{y+5}{2} = x, \quad x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

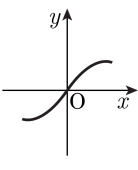
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = -6\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) + 2 = -3x - 13$$

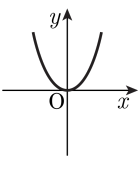
12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은
무엇인가?



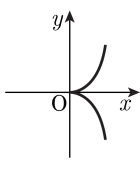
①



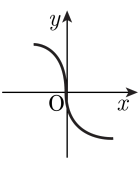
②



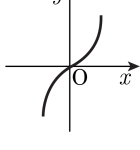
③



④



⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

13. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

- ① 2 가지
- ② 3 가지
- ③ 6 가지
- ④ 8 가지
- ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{2}$

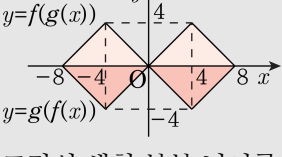
①, ②를 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

14. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

- ① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$
 $x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$
 $x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면
 $\therefore 8 \times 8 = 64$