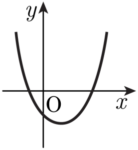
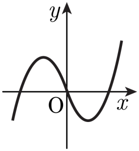
1. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

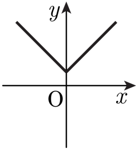
①



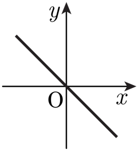
②



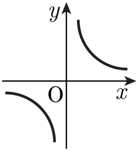
③



④



⑤



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

2. 함수 $f(x)=ax+b$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$일 때, $a+b$의 값은 얼마인가? (단 a, b 는 실수)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$\left(f^{-1}\right)^{-1}(x)=f(x)$이므로

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$의 역함수는

$f(x)=ax+b$이다.

$y=\frac{1}{3}x+2$로 놓고 x, y를 서로 바꾸면

$x=\frac{1}{3}y+2,\ y=3x-6$

$a=3,\ b=-6$

$\therefore a+b=-3$

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

4. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

5. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하면?

① 6 개　② 8 개　③ 18 개　④ 24 개　⑤ 27 개

해설

$3 \times 3 \times 3 = 27$

6. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$

③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

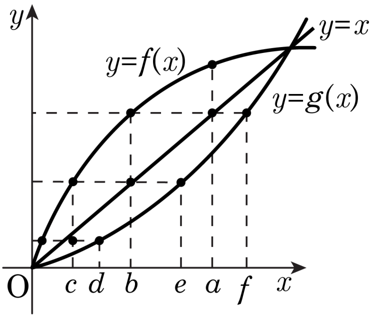
④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.
④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

7. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$

$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$

$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢

$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$

$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

8. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x)=2x+1$로 정의될 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$f(1)=2\times1+1=3$
$f(2)=2\times2+1=5$
$f(3)=2\times3+1=7$
$f(4)=2\times4+1=9$ 이므로
함수 f의 치역은 $\{3, 5, 7, 9\}$
따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3+5+7+9=24$

9. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}$에서 함수 f를 $f(x) =$ (x^2을 4로 나눈 나머지)로 정의하고
집합 $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$에서 함수 g를 $g(x) =$ (x^2을 8로 나눈 나머지)로 정의하자.
두 함수 f, g의 치역을 각각 P, Q라고 할 때, 집합 $P \cup Q$는?

① $\{0,\ 1\}$ ② $\{0,\ 4\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 4\}$

④ $\{0,\ 2,\ 4\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 4\}$

해설

(i) 집합 A의 원소 x를 $x = 2k-1$
(단, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 놓으면
$x^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$이므로 x^2을 4로 나눈 나머지는 1이다.
$\therefore\ P = \{1\}$

(ii) 집합 B의 원소 x중 $0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots$은 $x = 4k$ (단, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 나타내고
$2,\ 6,\ 10,\ \cdots$은 $x = 4k-2$
(단, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)로 놓자.
먼저 $x = 4k$일 때,
$x^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$이므로
x^2을 8로 나눈 나머지는 0이다.
또, $x = 4k-2$일 때,
$x^2 = (4k-2)^2$
$= 16k^2 - 16k + 4$
$= 8(2k^2 - 2k) + 4$이므로
x^2을 8로 나눈 나머지는 4이다.
$\therefore\ Q = \{0,\ 4\}$

(i), (ii)로부터 $P \cup Q = \{0,\ 1,\ 4\}$

10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x\text{는 무리수}) \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

일 때, $(g \circ f)(\pi)$ 의 값은 얼마인가?.

① 0　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$

④ 1　　⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$$

11. 두 함수 $f(x)=2x-5,\ g(x)=-6x+2$ 에 대하여 $(k\circ f)(x)=g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x+17$ ② $-3x-13$ ③ $-3x+13$

④ $-3x$ ⑤ $-5x+10$

해설

$(k\circ f)(x)=g(x)$

$(k\circ f\circ f^{-1})(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

$k(x)=(g\circ f^{-1})(x)$

$f(x)=2x-5$

$\therefore\ y=2x-5$

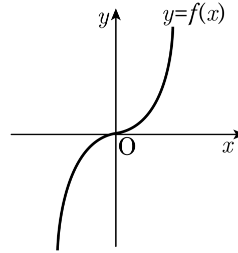
$\dfrac{y+5}{2}=x,\ x=\dfrac{y}{2}+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$

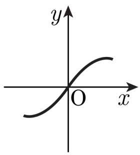
$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})(x)=-6\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}\right)+2=-3x-13$

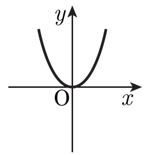
12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



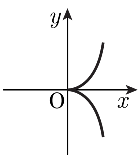
①



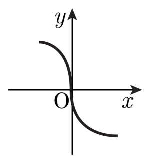
②



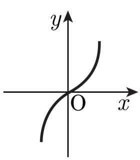
③



④



⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

13. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f\ :\ A \to A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가짓수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지

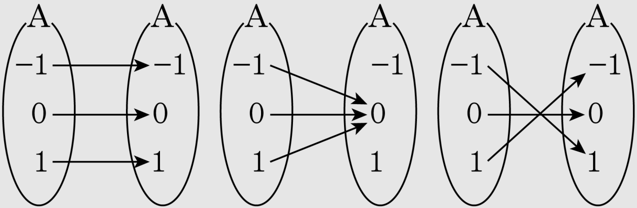
④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$

$\therefore f(0) = 0 \cdots ㉠$

$f(-1) = -f(1) \cdots ㉡$



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

14. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

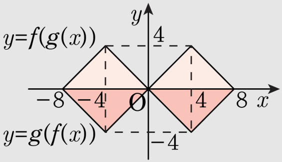
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8\times 8=64$