1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점$(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ ② $(x+1)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=20$ ④ $(x+1)^2+(y+2)^2=12$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$(3-1)^2+(-2-2)^2=r^2$ $\therefore$ $r^2=20$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=20$

2. 방정식 $2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$

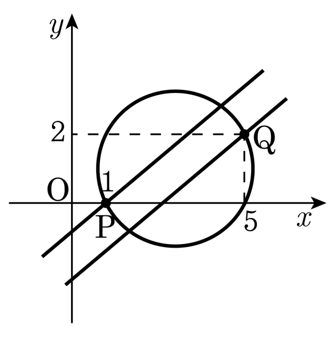
$\Rightarrow\ 2(x^2+2x+1-1)+2(y^2-2y+1-1)+3=0$

$\Rightarrow\ 2(x+1)^2+2(y-1)^2=1$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 반지름 길이 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 $C(3,\ 1)$이므로,
$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

4. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$일 때, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉠으로 놓으면

㉠은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$을 지나므로 연립방정식은

$26 + \mathrm{A} + 5\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉡

$20 - 2\mathrm{A} + 4\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉢

$34 + 5\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 연립방정식을 풀면

$\mathrm{A} = -2$, $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = -24 \cdots$ ㉤

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2 \cdots\cdots$ ㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \cdots\cdots$ ㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}\quad (\because\ r > 0)$

6. 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$ ② $c^2=b$ ③ $a^2=c$
④ $c^2=a$ ⑤ $b=2c$

해설
y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x=0$ 으로부터 $y^2+2by+c=0$
y 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

7. 두 원 $x^2+y^2=9, (x-4)^2+(y-3)^2=4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$A:\ x^2+y^2=9$
중심 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이 3
$B:\ (x-4)^2+(y-3)^2=4$
중심 $(4,\ 3)$, 반지름의 길이 2
두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2+3^2}=5$
$\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과
같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

8. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d=7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다. ② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d=r_1+r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

9. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$
즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

10. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

> $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉠
> $y = 2x + k \cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
> $5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots$ ㉢
> ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
> $D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$
> (가)0
> k^2(나)5 $\quad \therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k = \pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

11. 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
$4x-2y=20$ $\therefore$ $y=2x-10$
따라서, $a=2$, $b=-10$ $\therefore$ $a+b=2-10=-8$

12. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

13. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않은</u> 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

14. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad), k < (\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

15. 중심이 직선 $y = x + 3$ $(x > 0)$ 위에 있고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 또 x축에 접하는 원의 반지름은?

① 2　　② 5　　③ 10　　④ 12　　⑤ 15

해설

중심을 $(a,\ a+3)$ 이라 하면 반지름이
$a+3$ 이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$ ……㉠
㉠이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-a)^2+(2-a-3)^2=(a+3)^2 \Rightarrow a^2-6a-7=0$
$\Rightarrow (a+1)(a-7)=0$
$\Rightarrow a=7 \quad (\because x>0 \Rightarrow a>0)$
$\therefore$ 반지름 : $a+3=7+3=10$

16. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

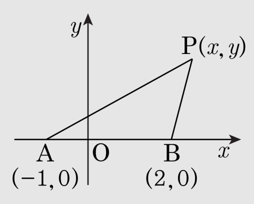
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3,4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2 \qquad \therefore\ a+b=2+1=3$

17. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0), \mathrm{B}(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면



$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$

$2\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AP}}$

$\therefore\ 4\overline{\mathrm{BP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2$

그런데 $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

18. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

19. 두 원 O와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

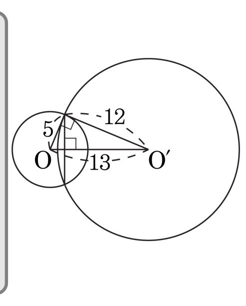
① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$

$\therefore \ x = \frac{120}{13}$



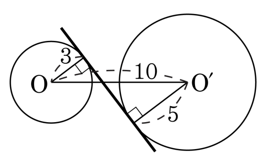
20. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

21. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

22. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

23. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$ ② $0<k<4$ ③ $-4<k<0$
④ $-2<k<0$ ⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면
$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$
이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고
$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$ $\therefore$ $-4<k<4$

24. 직선 $y=-2x+a$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

직선 $y=-2x+a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$a=2\times2+1=5$

25. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{2}x\pm 1$ ② $y=-\sqrt{2}x\pm 5$ ③ $y=-\sqrt{3}x\pm 4$
④ $y=-\sqrt{3}x\pm 9$ ⑤ $y=-\sqrt{5}x\pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=\left(-\sqrt{3}\right)x\pm 2\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$

$\therefore y=-\sqrt{3}x\pm 4$

26. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -2), \mathrm{B}(9,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$　② $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 20$

③ $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 40$　④ $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 60$

⑤ $(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

해설

조건을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$

이때, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$2\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$

양변을 제곱하면

$4\left\{(x+3)^2 + (y+2)^2\right\} = (x-9)^2 + (y-4)^2$

전개하여 정리하면

$x^2 + y^2 + 14x + 8y - 15 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

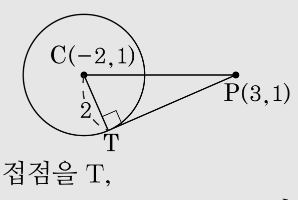
27. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{7}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{17}$　⑤ $\sqrt{21}$

해설

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 을 표준형으로 고치면

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$



아래 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T, 원의 중심을 $\mathrm{C}(-2,1)$ 이라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$ 는 $\angle\mathrm{PTC}=90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2=\left\{\sqrt{(3+2)^2+(1-1)^2}\right\}^2-2^2=21$$

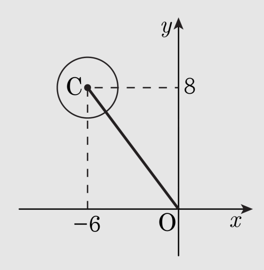
$\therefore \overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{21}$

28. 원점에서 $x^2+y^2+12x-16y+96=0$ 위의 임의의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 12　　② 16　　③ 20　　④ 24　　⑤ 28

해설

$x^2+y^2+12x-16y+96=0$을 변형하면
$(x+6)^2+(y-8)^2=4$이므로
이 원은 중심이 $\mathrm{C}(-6, 8)$, 반지름의 길이가 2이다.
이 때, 원점 O에서 점 $\mathrm{C}(-6, 8)$에 이르는 거리는
$\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{(-6)^2+8^2} = 10$이므로
원점 O에서 원 위의 점에 이르는 거리의
최솟값은 $\overline{\mathrm{OC}}-2 = 10-2 = 8$이고,
최댓값은 $\overline{\mathrm{OC}}+2 = 10+2 = 12$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.



29. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

30. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$4\left\{(x-3)^2 + (y-2)^2\right\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

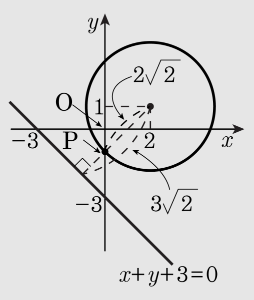
따라서 점 는 중심이 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x + y + 3 = 0$

사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



31. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$\angle \mathrm{AOB}=90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

32. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

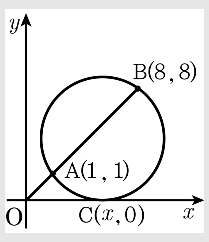
해설

다음 그림에서

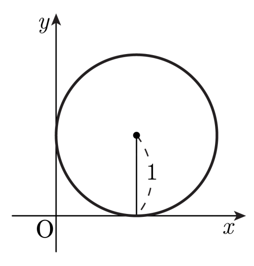
$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



33. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x축, y축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1}=k$라 하면 직선 $y+2=k(x+1)$은
k 값에 관계없이 점 $(-1,-2)$를 지난다.
이 때, 기울기 k는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$\dfrac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

$|2k-3|=\sqrt{k^2+1}$

$4k^2-12k+9=k^2+1$

$3k^2-12k+8=0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.