1. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$이면,

$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

2. $x=1+2i$, $y=\dfrac{1+2i}{1-i}$, $z=\dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy+xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$

④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$$x=1+2i,\ y=\frac{1+2i}{1-i},\ z=\frac{1-2i}{1-i}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy+xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i}+\frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i}\\ &= \frac{2+4i}{1-i}\\ &= -1+3i\end{aligned}$$

3. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2-6x+5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1+\sqrt{2}i$

$3x-1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1 = -2$

$\therefore\ 9x^2-6x = -3$

$9x^2-6x+5$ 에서 $9x^2-6x$ 가 -3 이므로 $-3+5=2$

4. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z} - 1}{z} - \dfrac{z - 1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{i}{1 - i} - \dfrac{-i}{1 + i} = \dfrac{2i}{2} = i$

5. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p + 1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p 에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로
실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4 이다.

6. 다음 식 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$을 인수분해하면?

① $(x^2-x+7)(x^2-5x+3)$ ② $(x^2-5x+7)(x^2-x+3)$

③ $(x^2-5x+6)(x^2-5x+3)$ ④ $(x^2-5x+7)(x^2-5x+3)$

⑤ $(x^2-2x+7)(x^2-5x+3)$

해설

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3 \\
&=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-3 \\
&=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-3 \\
&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24-3 \\
&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+21 \\
&=(x^2-5x+7)(x^2-5x+3)
\end{aligned}
$$

7. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

8. $\left(125^2 - 75^2\right) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75　② 125　③ 900　④ 1000　⑤ 1225

해설

$$125^2 - 75^2 = (125 + 75)(125 - 75)$$
$$= 200 \times 50 = 10000$$

$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + 5 = 10$ 이므로

(준 식) $= 10000 \div 10 = 1000$

9. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

10. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

11. z를 입력시키면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100}이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2i$ ④ 2 ⑤ 2^{100}

해설

$z \to zi \to zi^2 \to zi^3 \to \cdots \to zi^{100}$

$\therefore zi^{100} = 2^{100}$

$\therefore z = 2^{100}$

12. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

13. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

14. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$일 때

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$ 또는 $x = 3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$일 때

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

15. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

16. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

17. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

18. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

19. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

20. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3\pm\sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a}=-4\cdot 7=-28,\ c=-28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a}=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6,\ b=6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2+6ax-28a=0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

21. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형

④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$

$=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서

$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$

$a^2-b^2+2bc-c^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$

$2a^2=2b^2+2c^2$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

22. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i) $x<-1$일 때,

$-(x+1)-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)

ii) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

(i), (ii), (iii)에 의해 $x=0,\ 4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

23. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha|=\frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$$

$$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$$

$$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$$

양변을 제곱하면

$$(p+4)^2-4(q-2)=4$$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

24. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$ ② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$ ④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

25. x의 이차방정식 $x^2+(2m-1)x+m^2-m-2=0$의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$D=(2m-1)^2-4(m^2-m-2)=9>0$이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha+2\alpha=-(2m-1)>0$ ······ ㉠
$\alpha\times 2\alpha=m^2-m-2>0$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$m<-1$ ······ ㉢
또, ㉠에서의 $\alpha=\dfrac{1-2m}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $m=-4,\ 5$
조건 ㉢에 의해서 $m=-4$